8. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 (Lineares homogenes Differentialgleichungssystem)
Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem sowie die allgemeine Lösung von

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y(x).$$

Geben Sie außerdem die Lösung an, die der Anfangsbedingung $y(0) = (0,1,1)^T$ genügt.

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix lautet $P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$ und deshalb hat sie die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = (2,-3,2)^T, v_2 = (0,1,-i)^T, v_3 = \overline{v_2}$ mit $\operatorname{Re} v_2 = (0,1,0)^T$, $\operatorname{Im} v_2 = (0,0,-1)^T$.
Somit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; y_2(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}, \; y_3(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x)$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Lösen des Gleichungssystems $y(0) = C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0) + C_3 y_3(0)$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ergibt $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1$ und somit ist

$$y(x) = y_2(x) - y_3(x) = e^x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x - \sin 2x \\ \sin 2x + \cos 2x \end{pmatrix}.$$

G 2 (Lineares inhomogenes System mit nichtkonstanter Matrix)
Sei das folgende lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/x^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/x^2 \\ -1/x \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Überprüfen Sie, dass die Matrix $W(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} -2x & 1/x^2 \\ x^2 & 1/x \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Systems mit dem Anfangswert $\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Es gilt $\det W(x) = -3 \neq 0$ und deshalb sind die Funktionen $\varphi_1(x) = (-2x, x^2)^T$, $\varphi_2(x) = (1/x^2, 1/x)^T$ linear unabhängig.
Es bleibt zu zeigen, dass W auch eine Lösungsmatrix ist. Diese muss der Matrix-Differentialgleichung $W'(x) = A(x)W(x)$ genügen, wobei $A(x)$ die Koeffizientenmatrix ist. Weil $W'(x) = \begin{pmatrix} -2 & -2/x^3 \\ 2x & -1/x^2 \end{pmatrix}$, kann man nachrechnen, dass die Matrix-Differentialgleichung wirklich erfüllt ist.

(b) Die Matrix W ist invertierbar und es gilt $W^{-1}(x) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/x & -1/x^2 \\ -x^2 & -2x \end{pmatrix}$. Durch Variation der Konstanten $y(x) = W(x)W^{-1}(x_0)y_0 + W(x)\int\limits_{x_0}^{x} W^{-1}(t)r(t)\mathrm{d}t$ mit $x_0 = 1$, $y_0 = (-1,0)^T$ und $r(t) = (1/t^2, -1/t)^T$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= -\frac{1}{3}W(x)\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_1^x \begin{pmatrix} 1/t & -1/t^2 \\ -t^2 & -2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/t^2 \\ -1/t \end{pmatrix}\mathrm{d}t\right] \\ &= -\frac{1}{3}W(x)\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_1^x \begin{pmatrix} 2/t^3 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t\right] \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2x & 1/x^2 \\ x^2 & 1/x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

G 3 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 y + 1, \; y(0) = 0,$$

mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für die Lösung y.

(a) Bestimmen Sie die ersten 11 Glieder der Potenzreihe für y.

(b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koeffizienten a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, an.

(a) Aus $y(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$. Die Potenzreihe $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ löst die Differentialgleichung, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

Daraus folgt

$$a_1 - 1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)a_{n+1} - a_{n-2}\right) x^n = a_1 - 1 + 2a_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} \left(n a_n - a_{n-3}\right) x^{n-1} = 0.$$

Damit gilt $\quad a_1 = 1, \quad 2a_2 = 0 \quad$ *und* $\quad a_n = \frac{1}{n} a_{n-3}$ *für* $n = 3, 4, \ldots$.
Die elf gesuchten Koeffizienten dann sind

$$a_0,\, a_2,\, a_3,\, a_5,\, a_6,\, a_8,\, a_9 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_7 = \frac{1}{28}, \quad a_{10} = \frac{1}{280}.$$

(b) Mit $a_0 = 0$ aus der Anfangsbedingung, $a_1 = 1$ und $a_2 = 0$ können wir die Koeffizienten a_n explizit bestimmen. Es gilt

$$a_{3k} = 0, \quad a_{3k+1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(3j+1)}, \quad a_{3k+2} = 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hausübungen

H 1 (Konstante Koeffizienten) (2 Punkte)
Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

an. Berechnen Sie die Lösung, die die Anfangsbedingung $(x(0), y(0), z(0))^T = (2, 0, -3)^T$ erfüllt.

Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix ist $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$.
Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ ist $v_1 = (1, -1, -3)^T$. Zum doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = -1$ finden wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren, etwa $v_2 = (1, 1, 0)^T$ und $v_3 = (0, 2, 1)^T$.
Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist daher

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Lösen des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *ergibt $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ und $C_3 = 0$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} \\ -3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

H 2 **(Variation der Konstanten)** (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 + x^2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + y_3 + x^2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 + x^2 . \end{aligned}$$

Hinweis: Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix sind $v_1 = (2,1,1)^T$, $v_2 = (-1,1,1)^T$ und $v_3 = (0,-1,1)^T$. Benutzen Sie den Ansatz $y(x) = W(x)c(x)$, um ein Gleichungssystem für c' zu bekommen.

Sei A die Koeffizientenmatrix. Dann gilt $Av_1 = 2v_1$, $Av_2 = (-1)v_2$ und $Av_3 = (-2)v_3$. Also sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$ die Eigenwerte von A. Somit bilden die Funktionen

$$\varphi_1 = e^{2x}v_1,\ \varphi_2 = e^{-x}v_2 \text{ und } \varphi_3 = e^{-2x}v_3$$

ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems.
Der Ansatz $y(x) = W(x)c(x)$ mit der Fundamentalmatrtix $W(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$ und Variation der Konstanten liefert das Gleichungssystem der Form $W(x)c'(x) = r(x)$

$$\begin{pmatrix} 2e^{2x} & -e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & e^{-x} & -e^{-2x} \\ e^{2x} & e^{-x} & e^{-2x} \end{pmatrix} \cdot c'(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

Man rechnet leicht nach, dass $c_1'(x) = \frac{2}{3}x^2e^{-2x}$, $c_2' = \frac{1}{3}x^2e^x$ und $c_3'(x) = 0$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems ist. Integration liefert

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int (-\tfrac{1}{6})(-4x^2e^{-2x})\mathrm{d}x + d_1 &&= -\tfrac{1}{6}e^{-2x}(2x^2+2x+1) + d_1, \\ c_2(x) &= \int \tfrac{1}{3}x^2e^x \mathrm{d}x + d_2 &&= \tfrac{1}{3}e^x(x^2-2x+2) + d_2, \\ c_3(x) &= d_3. \end{aligned}$$

Damit ist $y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) + c_3(x)\varphi_3(x)$ die gesuchte Lösung.

H 3 **(Potenzreihenansatz)** (5 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Glieder bis zur 7. Ordnung einschließlich für die Lösung des Problems $y' = (x+1)y + 1$, $y(-1) = 0$. Geben Sie außerdem eine allgemeine Formel für die Koeffizienten des Potenzreihenansatzes für y an.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_5$ der Potenzreihe für die Lösung von

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1,\ y(0) = 1, \quad \text{mit } -1 < x < 1.$$

Leiten Sie daraus eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

(a) *Wir gehen analog der Aufgabe G3 vor, aber diesmal ist der Anfangspunkt $x_0 = -1$. Aus Einsetzen des Potenzreihenansatzes $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ in die Differentialgleichung folgt*

$$a_1 - 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(na_n - a_{n-2})(x+1)^{n-1} = 0 \quad \text{und somit} \quad a_1 = 1,\ a_n = \frac{1}{n}a_{n-2} \text{ für } n = 2,3,\dots .$$

Die Anfangsbedingung $y(-1) = 0$ liefert $a_0 = 0$. Wir bekommen die gewünschten Koeffizienten

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{15}, \quad a_7 = \frac{1}{105}$$

und $y(x) = x + 1 + \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{15}(x+1)^5 + \frac{1}{105}(x+1)^7 + \dots$.
Allgemein gilt für die Koeffizienten a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, von $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$

$$a_{2k} = 0 \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(2j+1)} \quad \text{für } k = 0,1,2,\dots .$$

(b) *Durch Einsetzen des Potenzreihenansatzes* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ *mit* $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$ *in die Differentialgleichung folgt*

$$\begin{aligned}
y'(x) &= (y(x))^2 + (1-x)\cdot y(x) - 1 \\
&= a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \ldots \\
&\quad + (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) - 1 \\
&= (a_0^2 + a_0 - 1) + (2a_0a_1 + a_1 - a_0)x + (2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1)x^2 \\
&\quad + (2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ *ergibt sich* $a_0 = 1$ *und durch einen Koeffizientenvergleich folgt*

$$\begin{array}{rcl}
1 & : & a_1 = a_0^2 + a_0 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \\
x & : & 2a_2 = 2a_0a_1 + a_1 - a_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 \\
x^2 & : & 3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1 \\
x^3 & : & 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1 \\
x^4 & : & 5a_5 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 1.
\end{array}$$

Aufgrund dieses Ergebnisses können wir vermuten, dass

$$a_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 .$$

In diesem Fall wäre

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Wir machen die Probe. Mit $y'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$ *folgt*

$$y^2(x) + (1-x)\cdot y(x) - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} + (1-x)\cdot\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} = y'(x)$$

und $y(0) = \frac{1}{1-0} = 1$. *Damit ist*

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.