7. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Minitest

T 1 Wieviele Anfangsbedingungen braucht man, damit die Lösung einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung eindeutig wird?

T 2 Entscheiden Sie, welche der folgenden Differentialgleichungen linear sind.

( ) $xy' + 2y^2 = 0$
( ) $x^2y^{(7)} + 12y' + y^{(5)} = \cos x$
( ) $y - e^x y' - e^x + y^{(4)} = \sin x$

T3 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind.

( ) Sind f und g differenzierbare Funktionen mit $f(0) = g(0)$, so sind f und g linear abhängig.
( ) Sind f und g Lösungen einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung und gilt $f(0) = g(0)$, so sind f und g linear abhängig.

T 1 *n*

T 2 *nein. ja. ja, wenn man auf beiden Seiten e^x addiert.*

T 3 *Nein. x und x^2 sind linear unabhängig.*
Ja. f und g lassen sich durch die Formel von der Variation der Konstanten berechnen. Also gilt $f = g$.

Gruppenübungen

G 1 **(Eine homogene Differentialgleichung dritter Ordnung)**
Bestimmen Sie die allgemeine komplexwertige und die allgemeine reellwertige Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

Bestimmen Sie weiterhin alle reellen Lösungen, die beschränkt sind, gegen $+\infty$ anwachsen beziehungsweise gegen 0 konvergieren.

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Eine erste Nullstelle erhält man durch raten: $\lambda_1 = 2$. Das Polynom läßt sich nun zerlegen (z.B. Polynomdivision) in $(\lambda^2 + 1)(\lambda - 2)$. Demzufolge lauten die zwei anderen Nullstellen $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Wir bekommen das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = \cos x,\ y_3(x) = \sin x$$

und die allgemeine (reellwertige) Lösung

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige komplexe Lösung lautet

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{ix} + c_3 e^{-ix}\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

Damit die reelle Lösung $y(x)$ beschränkt ist, muss $c_1 = 0$ sein also $y(x) = c_2 \cos x + c_2 \sin x$. Gegen undenlich wachsen alle Lösungen $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ mit $c_1 > 0$ an. Die einzige Lösung, die für $x \to \infty$ gegen 0 konvergiert ist die Lösung $y = 0$.

G 2 (Ansatz vom Typ der Störfunktion)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = \sin(2x).$$

Das charakteristische Polynom lautet $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$. *Wir suchen also* λ *mit*

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Eine erste Nullstelle erhält man durch Raten: $\lambda_1 = 1$. *Das Polynom läßt sich nun zerlegen in* $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$. *Wir erhalten die Nullstellen* $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, *d.h. 1 ist doppelte Nullstelle. Das Fundamentalsystem ist gegeben durch*

$$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = xe^x,\ y_3(x) = e^{2x}.$$

Aufgrund der Form der Störfunktion wählen wir als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Ableiten dieser Funktion (bis 3.Ableitung), Einsetzen und anschließender Koeffizientenvergleich ergibt $A = -\frac{1}{100}$, $B = \frac{7}{100}$ *und wir erhalten als allgemeine Lösung der DGL*

$$y(x) = c_1 e^e + c_2 x e^x + c_3 e^{2x} + \tfrac{7}{100}\sin(2x) - \tfrac{1}{100}\cos(2x).$$

Hausübungen

H 1 (Homogene Differentialgleichungen n-ter Ordnung) (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y''' - y'' = y - y'$.
b) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$.

Wir setzen in allen Fällen mit dem charakteristischen Polynom an. Im ersten Falle erhalten wir das Polynom $P_1(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$. *Die erste Nullstelle,* $\lambda = 1$, *errät man leicht, und z.B. durch Polynomdivision erhält man* $P_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. *Das Polynom hat also eine einfache Nullstelle bei* $\lambda = 1$, *und je eine Nullstelle bei* i *und* $-i$. *Also ist das System* $e^x, \sin(x), \cos(x)$ *ein Fundamentalsystem der DGL, und die allgemeine Lösung ist von der Form*

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2\sin(x) + c_3\cos(x)\ .$$

Die zweite Gleichung besitzt das charakteristische Polynom

$$P_3(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

und hat die Funktionen $1, x, e^x, xe^x$ *(man beachte* $e^{0\cdot x} = 1$ *!) als Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist hier*

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x\ .$$

H 2 (Ansatz vom Typ der Störfunktion) (3 Punkte)
Für welche Zahlen $r \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem

$$4y'' + y = r\sin(x/2)\ , \qquad y(0) = 0, y(2\pi) = 1$$

reelle Lösungen? Welche?

Das charakteristische Polynom lautet $4\lambda^2 + 1 = 0$ *und hat die Lösungen* $\lambda_1 = 1/2 \cdot i$, $\lambda_2 = -1/2 \cdot i$ *Die homogene DGL hat die Lösung* $y_H(x) = c_1 \sin(x/2) + c_2 \cos(x/2)$ *; die rechte Seite ist also Lösung der homogenen DGL (Resonanzfall). Der Ansatz vom Typ der rechten Seite bringt uns daher zu*

$$y_p(x) = Ax\sin(x/2) + Bx\cos(x/2) \ ,$$

und A *und* B *werden durch Einsetzen als* $A = 0$, $B = -r/4$ *bestimmt. Die allgemeine Lösung ist also*

$$y(x) = c_1 \sin(x/2) + c_2 \cos(x/2) - r/4x\cos(x/2) \ .$$

Nun betrachten wir die Randbedingungen: $y(0) = 0$ *sorgt für* $c_2 = 0$, *und* $y(2\pi) = 1$ *liefert die Bedingung* $\pi r/2 = 1$, *also existieren Lösungen genau dann, wenn* $r = 2/\pi$, *und dann sind alle Funktionen der Form*

$$y(x) = c_1 \sin(x/2) - \frac{1}{2\pi} x\cos(x/2)$$

Lösungen des Randwertproblems.

H 3 (Eine Eulersche Differentialgleichung) (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Eulerschen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 7xy' + 15y = 0, \qquad x > 0.$$

b) Geben Sie die Lösung an, die die Anfangsbedingungen $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$ erfüllt.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x^2y'' - 7xy' + 15y = 1$ an.

(a) Mit dem Ansatz $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$ *erhält man*

$$\begin{aligned} y(x) &= u(t), \\ y'(x)x &= u'(t), \\ y''(x)x^2 &= u''(t) - u'(t). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(*) \qquad u''(t) - 8u'(t) + 15u(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$. *Die allgemeine Lösung von* $(*)$ *ist also* $u(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{5t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Rücksubstitution ergibt* $y(x) = c_1x^3 + c_2x^5$ *mit* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ *als Lösung. Somit ist*

$$y(x) = x^3 - x^5$$

die Lösung des AWP.

c) Offenbar löst die konstante Funktion $y_P = \frac{1}{15}$ *die gegebene Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung setzt sich dann aus der allgemeinen homogenen Lösung und dieser speziellen Lösung zusammen:* $y(x) = c_1x^3 + c_2x^5 + \frac{1}{15}$ *mit* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.