6. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Minitest

T1 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L(y) := a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = b(x)$$

mit stetigen a_i und $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt:

(w) Die Lösungen $y_1, y_2, ..., y_n$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für ein $x \in (a,b)$ gilt.
(w) Die Lösungen $y_1, y_2, ..., y_n$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.
(w) Die Lösungen $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.

T2 Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x) = x$. Berechnen Sie $\operatorname{div} F$. Es gilt $\operatorname{div} F = 0$.

T3 Das Vektorfeld F und die skalarwertige Funktion φ seien zweimal stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(w) $\operatorname{div} \nabla(\varphi) = \Delta\varphi$,
(f) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \operatorname{rot} F$,
(f) $\operatorname{rot}(\varphi F) = F \cdot \operatorname{grad} \varphi$.

Gruppenübungen

G 1 Lösung durch die Umkehrfunktion

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{x^2 + y}, \; y(1) = 1.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Problem zu einem Anfangswertproblem in $x(y)$ um.

Die Differentialgleichung $y'(x) = f(x,y)$ kann man zu $x'(y) = \frac{1}{f(x,y)}$ umformen, wenn $f(x,y) \neq 0$. Also ergibt sich hier für $x > 0$ das Anfangswertproblem

$$x' = x + yx^{-1}, \; x(1) = 1.$$

Das ist eine Bernoulli'sche Differentialgleichung. Mit der Substitution $z(y) = (x(y))^2$ ergibt sich das äquivalente Problem

$$z' = 2z + 2y, \; z(1) = 1.$$

Variation der Konstanten führt auf

$$z(y) = e^{2y}(e^{-2} + \int_1^y 2te^{-2t}dt) = e^{2y}(e^{-2} - ye^{-2y} - \frac{1}{2}e^{-2y} + e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-2}) = \frac{5}{2}e^{2(y-1)} - y - \frac{1}{2}.$$

Rücksubstituieren ergibt

$$x(y) = \sqrt{\frac{5}{2}e^{2(y-1)} - y - \frac{1}{2}}.$$

G 2 Linear unabhängige Funktionen

Betrachten Sie die Funktionen $f_1 : I \to \mathbb{R}, f_1(x) = x$ und $f_2 : I \to \mathbb{R}, f_2(x) = |x|$

(a) auf dem Intervall $I = [0,1]$ und
(b) auf dem Intervall $I = [-1,1]$.

Sind f_1, f_2 linear unabhängig?

Auf dem Intervall $[0,1]$ ist $f_1 = f_2$, also sind die Funktionen linear abhängig. Auf dem Intervall $[-1,1]$ impliziert $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \; \forall x \in [-1,1]$ zum Beispiel für $x = 1$ und $x = -1$, dass $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Die Wronski-Determinante können wir nicht berechnen, weil f_2 in 0 nicht differenzierbar ist.

G 3 Fundamentalsystem

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{y}{x} = 0\,.$$

(a) Welche der folgenden Funktionspaare bilden ein Fundamentalsystem dieser Gleichung?

(i) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 3x+6.$

(ii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = x-3.$

(ii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 4+2x-2e^x+xe^x.$

(b) Bestimmen Sie nun eine Lösung der obigen Gleichung, die den Anfangsbedingungen $y(2) = 8$, $y'(2) = 2+e^2$ genügt.

(a) Wir berechnen die Wronski–Determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} e^x(x-2) & 3x+6 \\ e^x(x-1) & 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot [3(x-2)-(3x+6)(x-1)] \neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} e^x(x-2) & x-3 \\ e^x(x-1) & 1 \end{pmatrix} = e^x \cdot [(x-2)-(x-1)(x-3)] \neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} e^x(x-2) & 4+2x-2e^x+xe^x \\ e^x(x-1) & 2-2e^x+(x+1)e^x \end{pmatrix} = e^x \cdot [(x-2)(2+(x-1)e^x)-(x-1)(4+2x-2e^x+xe^x)] \neq 0,$$

wobei es schon genügt, wenn die Determinante für ein $x > 0$ nicht 0 ist, im letzten Fall zum Beispiel für $x = 1$. Also sind alle Paare linear unabhängig, und es ist nur fraglich, ob sie Lösungen der DGL sind. Dies lässt sich leicht nachrechnen: Das erste Paar ist ein Fundamentalsystem, das zweite nicht, das dritte hingegen schon.

(b) Wir setzen mit dem dem ersten Paar die allgemeine Lösung an:

$$y = c_1 e^x(x-2) + c_2(3x+6),$$

die Bedingung $y(2) = 8$ liefert $c_2 = 2/3$, die Bedingung $y'(2) = 2+e^2$ ergibt dann $c_1 = 1$. Die Lösung lautet also

$$y = e^x(x-2) + (2x+4).$$

Hausübungen

H 1 Konstante Koeffizienten

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 5.$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 7\lambda + 4.$$

Es hat die Nullstellen $1, 1, -4$. Daraus ergibt sich das Fundamentalsystem e^x, xe^x, e^{-4x}. Die allgemeine Lösung ist also

$$y(x) = a_0 e^x + a_1 x e^x + a_2 e^{-4x}.$$

Einsetzen der Anfangswerte führt auf die Gleichungen $a_0 + a_2 = 0, a_0 + a_1 - 4a_2 = 3, a_0 + 2a_1 + 16a_2 = 5$. Daraus folgt $a_0 = \frac{1}{25}, a_1 = 2\frac{4}{5}, a_2 = -\frac{1}{25}$, also ist die gesuchte Lösung $y(x) = \frac{1}{25}e^x + 2\frac{4}{5}xe^x - \frac{1}{25}e^{-4x}$.

H 2 Lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' + y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = e^x$.

(b) Geben Sie eine Lösung an, die die Anfangswerte $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ annimmt.

(a) *Mit dem Ansatz* $y(x) = v(x) \cdot y_1(x) = v(x) \cdot e^x$ *folgt* $y'(x) = v'(x) \cdot e^x + v(x) \cdot e^x$ *und* $y''(x) = v''(x) \cdot e^x + 2v'(x) \cdot e^x + v(x) \cdot e^x$. *Einsetzen in die ursprüngliche DGL ergibt*

$$xe^x v''(x) + (x-1)e^x v'(x) = 0.$$

Mit der Substitution $z = v'$ *erhält man die lineare homogene DGL*

$$z' = z \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

mit allgemeiner Lsg.

$$z(x) = c \cdot xe^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Integration liefert

$$v(x) = -c \cdot e^{-x}(x+1) + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Multiplikation mit $y_1(x)$ *ergibt*

$$y(x) = -c \cdot (1+x) + d \cdot e^x.$$

(b) *Es ergeben sich die Gleichungen*

$$\begin{aligned} -2 \cdot c + d \cdot e &= -1 \\ -c + d \cdot e &= 2. \end{aligned}$$

Man erhält $c = 3$ *und* $d = 5/e$, *also*

$$y(x) = -3 - 3x + 5e^{x-1}.$$

H 3 Wronski-Determinante

Geben Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'''(x) = \sin x$$

an. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Das zugehörige charakteristische Polynom ist $\lambda^3 = 0$. *Daraus ergibt sich die dreifache Nullstelle* $\lambda_0 = 0$. *Also ist* $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ *ein Fundamentalsystem mit der Wronski-Matrix* $W(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Die Determinante ist* $\det W(x) = 2$. *Der Variation der Konstanten-Ansatz ist* $y = v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3$. *Um die* v_i *zu berechnen, lösen wir das Gleichungssystem*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $v_1' = x^2 \sin x - \frac{1}{2}x^2 \sin x = \frac{1}{2}x^2 \sin x$, $v_2' = -x \sin x$, $v_3' = \frac{1}{2}\sin x$. *Die Stammfunktionen sind* $v_1 = -\frac{1}{2}x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + k_1$, $v_2 = x \cos x - \sin x + k_2$, $v_3 = -\frac{1}{2}\cos x + k_3$. *Daraus ergibt sich für die allgemeine Lösung*

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 \cos x + x \sin x + \cos x + k_1 + x^2 \cos x - x \sin x + k_2 x - \frac{1}{2}x^2 \cos x + k_3 x^2 \\ &= \cos x + k_1 + k_2 x + k_3 x^3. \end{aligned}$$