5. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 (Lipschitz–Stetigkeit)
Prüfen Sie, ob die Funktionen

$$f_1(x,y) := x^2y^2\ ,$$
$$f_2(x,y) := x^4 \cdot \sqrt{|y|}\ ,$$
$$f_3(x,y) := x + |y|$$

Lipschitz–stetig sind bezüglich y in den Bereichen

$$R = \{(x,y)\ :\ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

und

$$S = \{(x,y)\ :\ -1 \le x \le 1, y \in \mathbb{R}\}\ .$$

f_1 lässt sich nach y stetig differenzieren mit $(f_1)_y(x,y) = 2x^2y$. Das ist beschränkt auf R. Also sind nach Satz 3.1 f_1 auf R Lipschitz–stetig. Auf S ist f_1 nicht Lipschitz stetig, denn $f_2(1,y) - f_2(1,0) = f_2(1,y) = y^2$ kann man nicht für alle $y > 0$ durch ein Vielfaches von y abschätzen.

f_2 ist weder auf R noch auf S Lipschitz stetig. Denn sei $x = \frac{1}{2}$ und $y_2 = 4y_1$. Dann gilt

$$\frac{f_2(x,y_2) - f_2(x,y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{1}{16}\frac{\sqrt{4|y_1|} - \sqrt{|y_1|}}{4y_1 - y_1} = \frac{\sqrt{|y_1|}}{16 \cdot 3y_1} \xrightarrow{y_1 \to 0} \infty.$$

Also kann es keine Konstante L geben mit $\|f_2(x,y_2) - f_2(x,y_1)\| \le L\|y_2 - y_1\|$.

f_3 ist nicht differenzierbar auf R, S, sodaß wir hier direkt rechnen müssen: Für f_3 haben wir

$$|f_3(x,y_1) - f_3(x,y_2)| = |(x + |y_1|) - (x + |y_2|)| = |(|y_1| - |y_2|)| \le |y_1 - y_2|\ .$$

(Die letzte Ungleichung folgt leicht durch Fallunterscheidung, oder durch Betrachtung der Betrags–Funktion). Also ist f_3 Lipschitz–stetig auf R und S.

Funktion	Lipschitz in R	Lipschitz in S
f_1	*Ja*	*Nein*
f_2	*Nein*	*Nein*
f_3	*Ja*	*Ja*

G 2 (Methode der sukzessiven Approximation)
Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(0) = 1$.

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung.
(b) Berechnen Sie 3 Näherungslösungen (sukzessive Approximation) mit $y_0 = y(0) = 1$. Vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung aus (a).

(a) Es gilt

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int x dx$$
$$y(x) = c \cdot e^{1/2 \cdot x^2}.$$

Wegen $y(0) = 1$ folgt $c = 1$.
(b) Die Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= y(0) + \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt = y(0) + \int_0^x t \cdot y_n(t) dt \\
y_1 &= 1 + \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} + 1 \\
y_2 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 \\
y_3 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6.
\end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist durch $y = e^{\frac{1}{2}x^2}$ *gegeben und die Näherungslösungen sind gerade die Partialsummen der exakten Lösung*

$$e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!},$$

wobei die Reihendarstellung der Exponentialfunktion verwendet wurde.

G 3 (Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x + 2, \quad y(0) = 0, \, y'(0) = 2.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = e^y, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = \sqrt{2}.$$

(a) Hier tritt y *nicht explizit auf, also Substitution* $z = y'$. *Man erhält eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung,*

$$z' = -z + x + 2.$$

Variation der Konstanten ergibt

$$z(x)e^{-x}\left[2 + \int_0^x (t+2)e^t \, dt\right] = x + 1 + e^{-x}.$$

Mittels Integration erhält man nun

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + d - e^{-x}, \quad d \in \mathbb{R},$$

mit $y(0) = 0$ *folgt* $d = 1$, *also*

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^{-x}.$$

(b) Wir nutzen den Energietrick. Die DGL ist äquivalent zu

$$2y' \cdot y'' = 2y' \cdot e^y \;,$$

was sich wiederum umschreiben lässt zu

$$\frac{\partial}{\partial x}(y')^2 = \frac{\partial}{\partial x}2F(y),$$

wobei $F(y)$ *eine Stammfunktion von* $f(y) = e^y$ *ist, also*

$$(y')^2 = 2e^y + d.$$

Wegen $y'(0) = \sqrt{2}$ *und* $y(0) = 0$ *folgt* $2 = 2e^0 + d$, *also* $d = 0$. *Da* $y'(0) = \sqrt{2} > 0$, *folgt also*

$$y' = \sqrt{2} \cdot e^{y/2} \;,$$

und durch Trennung der Veränderlichen erhält man mittels $-\frac{y'}{2e^{\frac{y}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$e^{-y/2} = -\frac{x}{\sqrt{2}} + c \;,$$

also

$$y = -2\ln(c - x/\sqrt{2}) \;.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ *sorgt nun noch für* $c = 1$.

Hausübungen

H 1 **(Satz von Picard–Lindelöf)** (3 Punkte)
Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3 \,, \qquad y(0) = 0 \,,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall $J = [-1/3, 1/3]$ existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion $u_0(x) = 0$ und bestimme u_2.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 x - y^3$ auf dem Rechteck $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq 1\}$

Zunächst ist die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 x - y^3$ auf dem Rechteck $R = \{(x,y) \;: |x|, |y| \leq 1\}$ stetig nach y differenzierbar und $f_y(x,y) = 2xy - 3y^2$ ist beschränkt auf R. Nun müssen wir $M = \max_R |f(x,y)|$ berechnen. Dazu schätzen wir zunächst ab:

$$|f(x,y)| = |x^2 + xy^2 - y^3| \leq |x^2| + |xy^2| + |y^3| \leq 3$$

(mit $|x| \leq 1$ ist auch z.B. $|x^2| \leq 1$), also ist $M \leq 3$. Dann können wir noch $x = 1, y = -1$ einsetzen, und erhalten $f(1,-1) = 1+1-(-1) = 3$, also ist $M = 3$. (Man kann dies auch durch Kurvendiskussion verifizieren). Damit ist $\alpha = \min\{1, 1/3\} = 1/3$, und also existiert nach dem Satz von Picard–Lindelöf eine eindeutige Lösung im Intervall $[-1/3, 1/3]$. Nun berechnen wir iterativ u_n durch die im Satz 3.3 angegebene Formel: $u_0 = 0$, und

$$u_1(x) = 0 + \int_0^x f(t, u_0(t)) \,\mathrm{d}t = \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 \,;$$

und

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x f(t, u_1(t)) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t^2 + \frac{1}{9}t^7 - \frac{1}{27}t^9 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{72}x^8 - \frac{1}{270}x^{10} \,. \end{aligned}$$

H 2 **(Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)** (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x \cdot y'' - y' + \frac{2}{x} = 0.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

(a) Durch die Substitution $y' = z$ und Auflösen nach z' erhält man

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Variation der Konstanten ergibt

$$z(x) = |x| \left(c + \int_1^x \frac{1}{t} \left(-\frac{2}{t^2} \right) dt \right) = \frac{1}{x} + c \cdot x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Somit folgt

$$y(x) = \ln(x) + c \cdot \frac{x^2}{2} + d, \quad x > 0,\; c, d \in \mathbb{R}.$$

(b) *Wir nutzen den Energietrick. Wir schreiben die DGL um:*

$$y'' = -1/y^3 \ ,$$

und multiplizieren mit $2y'$, *um*

$$2y' \cdot y'' = 2y' \cdot (-1/y^3)$$

zu erhalten. Dies ergibt nun

$$\frac{\partial}{\partial x}(y')^2 = 2\frac{\partial}{\partial x}F(y)$$

wobei $F(y)$ *eine Stammfunktion von* $f(y) = -\frac{1}{y^3}$ *ist, und also*

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + d.$$

Wegen $y'(1) = y(1) = 1$ *folgt* $d = 0$, *und wegen der positiven 1. Ableitung bei* 1 *ist* $y' > 0$, *also folgt*

$$y' = 1/y.$$

Und Trennung der Variablen ergibt wegen $yy' = 1$, *also* $\frac{1}{2}y^2 = x + c$,

$$y = \sqrt{2x + 2c}\ , \quad \text{da } y(1) > 0;$$

während die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ *noch für* $c = -\frac{1}{2}$ *sorgt, also* $y = \sqrt{2x - 1}$.

H 3 **(Reduktion der Ordnung)** (3 Punkte)
Es soll die Differentialgleichung $x^2y'' - xy' + y = 0$ auf $I = (0, \infty)$ gelöst werden.

1. Raten Sie eine Lösung y_1 der Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung.

1. $y_1(x) = x$ *ist eine Lösung.*

2. Wir machen den Ansatz $y = xu$, *also ist* $y' = u + xu'$ *und* $y'' = 2u' + xu''$. *Das wird in die DGL eingesetzt und wir erhalten*

$$\begin{aligned} x^2y'' - xy' + y = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2(2u' + xu'') - x(u + xu') + xu = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u''x^3 + u'(2x^2 - x^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u''x + u' = 0 \quad \text{wegen } x > 0. \end{aligned}$$

Die Substitution $v = u'$ *liefert die DGL* $v'x + v = 0$. *Mit Trennung der Variablen erhält man*

$$\ln v = \int \frac{1}{v} = -\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Es folgt $v(x) = \frac{1}{x}$ *und somit* $u = \ln x$, *also* $y_2 = x \ln x$. *Man rechnet nach, dass* y_2 *die DGL erfüllt. Dass* y_2 *unabhängig von* y_1 *ist, ist klar.*