# 4. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

## Gruppenübungen

**G 1 Noch ein Integralsatz I**

Zeigen Sie für den Normalbereich $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und die Funktionen $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ und $g(x,y) = e^x \sin y$, die Beziehung

$$-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d(x,y) + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma = 0,$$

indem Sie beide Integrale ausrechnen. Wie folgt diese Aussage aus der 1. Green'schen Integralformel?

*Wir parametrisieren den Rand von $\Omega$ durch die Wege $x_1(t) = (t,0)^T, x_2(t) = (1,t)^T, x_3(t) = (1-t,1)^T$ und $x_4(t) = (0,1-t)^T$, wobei $t$ immer über $[0,1]$ läuft. Die zugehörigen Normalen sind*

$$N_1 = (0,-1), N_2 = (1,0), N_3 = (0,1), N_4 = (-1,0).$$

*Die Integrale sind*

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d(x,y) &= -\int_0^1 \int_0^1 (1,1)^T \cdot (e^x \sin y, e^x \cos y)^T \, dxdy \\
&= -\int_0^1 \int_0^1 e^x \sin y + e^x \cos y \, dxdy \\
&= -\int_0^1 (\sin y + \cos y)(e-1) \, dy \\
&= -(e-1)(1 + \sin 1 - \cos 1)
\end{aligned}$$

*und*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma &= \int_0^1 t(-e^t \cos 0)dt + \int_0^1 (1+t)(e \sin t)dt + \int_0^1 (2-t)(e^{1-t} \cos 1)dt \\
&\quad + \int_0^1 (1-t)(-e^0 \sin(1-t))dt \\
&= -[te^t - e^t]_0^1 + e[\sin t - \cos t - t\cos t]_0^1 - \cos 1[(1-t)e^{1-t}]_0^1 - [(1-t)\cos(1-t) - \sin(1-t)]_0^1 \\
&= -1 + e(\sin 1 - 2\cos 1 + 1) + e\cos 1 + (\cos 1 - \sin 1) \\
&= -(1 - \cos 1 + \sin 1) + e(\sin 1 - \cos 1 + 1).
\end{aligned}$$

*Also ist*

$$-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d(x,y) + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma = 0.$$

*Die Funktion $g$ ist wegen $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$ harmonisch. Also gilt mit der Green'schen Integralformel*

$$-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d(x,y,z) + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma = \int_\Omega f \Delta g \, d(x,y,z) = 0.$$

**G 2 Anfangswertprobleme**

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = (y + x + 1)^2, \; y(0) = 0.$$

   Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Substitution.

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y\cos(x) + x^2 e^{\sin x}, \; y(0) = 5.$$

1. *Wir verwenden die Substitution $u(x) := x + y + 1$ und erhalten das äquivalente Problem*
$$u'(x) = 1 + y'(x) = 1 + u^2(x), u(0) = y(0) + 1 = 1.$$
*Durch Trennung der Variablen ergibt sich*
$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int dx.$$
*Das ist für alle $c \in \mathbb{R}$ äquivalent zu*
$$x + c = \arctan(u).$$
*Die allgemeine Lösung ist also*
$$u(x) = \tan(x + c)$$
*und*
$$y(x) = -x + u(x) - 1 = -x + \tan(x + \arctan(1)) - 1$$
*ist eine Lösung des Anfangswertproblems aus der Aufgabenstellung auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.*
2. *Mit der Formel für die Variation der Konstanten ergibt sich*
$$y = e^{\sin x}(5e^{\sin 0} + \int_0^x t^2 e^{\sin t} e^{-\sin t} dt) = e^{\sin x}(5 + \frac{1}{3}x^3).$$

**G 3 Bernoulli'sche Gleichung**

Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y' = y + x^2 y^4,\ y(0) = 1.$$

*Wir substituieren $z(x) = (y(x))^{-3}$ und erhalten so die lineare Differentialgleichung*
$$z' = -3z + (-3)x^2,\ z(0) = 1.$$

*Variation der Konstanten ergibt für dieses Problem*
$$\begin{aligned} z &= e^{-3x}(1 + \int_0^x (-3)t^2 e^{3t} dt) = e^{-3x}(1 - x^2 e^{3x} + \frac{2}{3}xe^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{2}{9}) \\ &= \frac{11}{9}e^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

*Die Rücktransformation ergibt $y(x) = (z(x))^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{11}{9}e^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}}}$.*

## Hausübungen

**H 1 Noch ein Integralsatz II**

Es seien $\Omega$ ein Normalbereich in $\mathbb{R}^3$ und $F, G : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Beweisen Sie den Integralsatz
$$\int_\Omega G \cdot \mathrm{rot} F \, d(x,y,z) = \int_\Omega F \cdot \mathrm{rot} G \, d(x,y,z) + \int_{\partial\Omega} (F \times G) \cdot N \, d\sigma.$$

*Wegen der Beziehung (38.22) aus dem Skript gilt*
$$\int_\Omega G \cdot \mathrm{rot} F \, d(x,y,z) = \int_\Omega F \cdot \mathrm{rot} G \, d(x,y,z) - \int_\Omega \mathrm{div}(F \times G) \, d(x,y,z).$$

*Auf das zweite Integral auf der rechten Seite können wir den Gauß'schen Integralsatz anwenden, weil auch $F \times G$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld ist. Die Behauptung folgt.*

**H 2 Riccati'sche Gleichung**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2},\; y(1) = 0.$$

Hinweis: Raten Sie zuerst eine spezielle Lösung, die der Anfangsbedingung nicht genügt.

*Eine geratene Lösung ist* $u(x) = \frac{1}{x}$, *denn* $u'(x) = -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}$. *Es gilt aber* $u(1) = 1$. *Die zugehörige Bernoulli'sche Gleichung ist*

$$v' = \frac{2}{x}v + v^2.$$

*Mit der Substitution* $z(x) = \frac{1}{v(x)}$ *führt das auf die lineare Differentialgleichung*

$$z' = -\frac{2}{x}z - 1.$$

*Die Lösung* $z$ *ergibt sich durch Variation der Konstanten,*

$$z(x) = e^{-2\ln x}(c - \int_1^x e^{2\ln t}dt) = \frac{1}{x^2}(c - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}) = \frac{3c+1}{3x^2} - \frac{x}{3}.$$

*Rückeinsetzen ergibt* $v(x) = \frac{3x^2}{3c+1-x^3}$. *Die allgemeine Lösung für das Problem aus der Aufgabenstellung ist also*

$$y(x) = u(x) + v(x) = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3c+1-x^3}.$$

*Die spezielle Lösung ergibt sich aus* $y(1) = 1 + \frac{3}{3c}$. *Also ist* $c = -1$ *und* $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{-2-x^3}$.

**H 3 Integrierender Faktor**

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung

$$(xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (1 - xy^2)\mathrm{d}y = 0$$

und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.
Hinweis: Der integrierende Faktor $\mu$ sollte als Funktion nur von $y$, $\mu = \mu(y)$, gewählt werden.

*Wir setzen* $\mu = \mu(y)$ *an. Nach der Formel (11) in Kapitel 2 müssen wir* $\mu$ *so bestimmen, dass*

$$-f \cdot \mu' = [f_y - g_x] \cdot \mu,$$

*also*

$$(y^3 - xy^2)\mu' = (2xy - 3y^2 + y^2) \cdot \mu.$$

*Das ergibt*

$$\mu_y = \frac{-2\mu}{y}.$$

*Eine Lösung für diese DGL ist* $\mu(y) = y^{-2}$. *Durch Multiplikation mit* $\mu$ *erhalten wir die exakte DGL*

$$(x - y)dx + (1/y^2 - x)dy = 0.$$

*Für das Potential* $u$ *gilt*

$$u(x,y) = \int_0^x \xi - y\,d\xi + \int_1^y \frac{1}{\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{y} + 1.$$

*Dabei ist zu beachten, dass die obige exakte Differentialgleichung nur auf einem Rechteck, das die* $x-$*Achse nicht enthält, gelöst werden kann. Die allgemeine Lösung ist implizit gegeben durch* $u(x,y) = c$. *Auflösen nach* $x$ *ergibt*

$$x(y) = y \pm \sqrt[2]{y^2 + \frac{2}{y} + 2c}.$$