3. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 (Noch ein Integralsatz)
Es seien $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei außerdem $G \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die Formel

$$\iiint\limits_G (\operatorname{div} u)(x)\phi(x)\,dx = \iint\limits_{\partial G} \phi(x)u(x)\cdot N\,d\sigma - \iiint\limits_G u(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx.$$

Nach (38.20) gilt $(\operatorname{div} u)(x)\phi(x) = \operatorname{div}(\phi u)(x) - u(x)\cdot\nabla\phi(x)$. *Wir integrieren diese Gleichung über* G *und wenden den Gaußschen Integralsatz an. Dann erhalten wir*

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G (\operatorname{div} u)(x)\phi(x)\,dx &= \iiint\limits_G \operatorname{div}(\phi(x)u(x))\,dx - \iiint\limits_G u(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx \\ &= \iint\limits_{\partial G} \phi(x)u(x)\cdot N\,d\sigma - \iiint\limits_G u(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

G 2 (Der Integralsatz von Stokes)
Sei $H(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ ein Vektorfeld. Sei $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Schnittkurve des Zylinders $x^2+y^2 = 1$ mit der Ebene $x+y+z = 1$. Der Weg Y beschreibe den Rand $\partial\mathcal{S}$ der Fläche $\mathcal{S}$. Bestimmen Sie

$$\int_{\partial\mathcal{S}} H\cdot dY$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

Die Parametrisierung der Fläche $\mathcal{S}$ *ist*

$$F : K \to \mathbb{R}^3, \qquad F(x,y) = (x, y, 1-x-y)^T,$$

mit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. *Damit ist*

$$F_x(x,y) = (1,0,-1)^T, \qquad F_y(x,y) = (0,1,-1)^T$$

und außerdem

$$rotH(x,y,z) = (0,0,3x^2+3y^2)^T.$$

Es gilt gemäß des Integralsatzes von Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{S}} H\cdot dY &= \iint\limits_K rotH\cdot(F_x(x,y)\times F_y(x,y))d(x,y) \\ &= \iint\limits_K 3(x^2+y^2)d(x,y).\end{aligned}$$

Nach Transformation in Polarkoordinaten folgt

$$\iint\limits_K 3(x^2+y^2)d(x,y) = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\phi = \tfrac{3}{2}\pi.$$

G 3 (Trennung der Veränderlichen)
Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0.$$

Lösen Sie dann das Anfangswertproblem $y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0$, $y(1) = 1$ und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Wir nutzen den Ansatz der Trennung der Veränderlichen

$$y' = f(y)g(x)$$

mit $g(x) = -\frac{(1+x)}{x}$. *D.h.* $\frac{y'}{y} = -1 - \frac{1}{x}$ *und*

$$\ln|y| = -\ln|x| - x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$|y(x)| = \frac{e^{c-|x|}}{x} = e^c \frac{e^{-|x|}}{x}$$

oder $y(x) = K\frac{e^{-|x|}}{x}$ *mit einer Konstanten* $K \in \mathbb{R}$. *Nach Einsetzen der Anfangswertbedingung folgt* $c = 1$ *oder* $K = e$. *Das ist eine Lösung für alle* $x \in]0, \infty[$.

Hausübungen

H 1 (Potential, Rotation) (3 Punkte)

(i) Sei $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1, x_2) = \frac{1}{||\vec{x}||^2} \cdot (-x_2, x_1)^T, \quad \vec{x} = (x_1, x_2)^T,\ D(f) = D$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für f gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(ii) Besitzt f ein Potential? Überprüfen Sie dazu, ob Wegintegrale über geschlossene Kurven gleich 0 sind.

(i)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-x_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{-1}\right) \\
&= \frac{x_2^2 - x_1^2}{||x||^4} \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{-1}\right) \\
&= \frac{x_2^2 - x_1^2}{||x||^4} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

(ii) Für $X(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ *gilt*

$$\int_{\partial D} f \cdot dX = \int_0^{2\pi} f(X(t)) \cdot \dot{X}(t) dt = 2\pi \neq 0.$$

Somit besitzt f *kein Potential.*

Das Problem ist, dass D *kein Normalbereich ist, weil es ein „Loch" hat.*

H 2 (Der Integralsatz von Stokes) (4 Punkte)

Sei $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(u, v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v)^T$$

und sei $\mathcal{F}$ die durch Φ gegebene Fläche. Der Weg $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibe den Rand $\partial\mathcal{F}$ der Fläche $\mathcal{F}$. Weiterhin sei die Funktion

$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ \text{ gegeben durch } \ H(x, y, z) = (y, x^2, x^2 + y^2).$$

(i) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{F}$.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY$$

unter Verwendung des Integralsatzes von Stokes.

(iii) Sei nun $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0,2\pi],\ v \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$ und $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Weg, der den Rand ∂D von D beschreibt. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\Phi(X)} H \cdot dY.$$

(ii) Wir berechnen das Integral $\int_{\mathcal{F}} rotH\, d\vec{\sigma}$. Es gilt

$$(rotH)(x,y,z) = (2y, -2x, 2x-1)^T,$$

$$\Phi_u(u,v) = (-\sin u \cdot \cos v, \cos u \cdot \cos v, 0)^T$$
$$\Phi_v(u,v) = (-\cos u \cdot \sin v, -\sin u \cdot \sin v, \cos v)^T$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} rot\ H \cdot d\vec{\sigma} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} rotH(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v))dvdu \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (2\cos^3 v \sin u \cos u - 2\cos^3 v \cos u \sin u \\ &\quad + 2\cos u \sin v \cos^2 v - \cos v \sin v)dvdu \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

(iii) Die Menge D ist ein Rechteck, welches durch vier Teilwege begrenzt wird.

$$\begin{aligned} X_1(t) &= (t,0)^T, \qquad t \in [0,2\pi] \\ X_2(t) &= (2\pi,t)^T, \qquad t \in [0,\pi/2] \\ X_3(t) &= (2\pi - t, \pi/2)^T, \qquad t \in [0,2\pi] \\ X_4(t) &= (0,\pi/2 - t)^T, \qquad t \in [0,\pi/2]\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $Y_k(t) := \Phi(X_k)(t)$, $k = 1,...,4$

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= (\cos t, \sin t, 0)^T, \qquad t \in [0,2\pi] \\ Y_2(t) &= (\cos t, 0, \sin t)^T, \qquad t \in [0,\pi/2] \\ Y_3(t) &= (0,0,1)^T, \qquad t \in [0,2\pi] \\ Y_4(t) &= (\cos(\pi/2 - t), 0, \sin(\pi/2 - t))^T, \qquad t \in [0,\pi/2].\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{\Phi(X)} H \cdot dY &= \int_0^{2\pi} H(Y_1(t)) \cdot \dot{Y}_1(t)dt + \int_0^{\pi/2} H(Y_2(t)) \cdot \dot{Y}_2(t)dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} H(Y_3(t)) \cdot \dot{Y}_3(t)dt + \int_0^{\pi/2} H(Y_4(t)) \cdot \dot{Y}_4(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt - \int_0^{\pi/2} \cos^3(\pi/2 - t)dt \\ &= -\pi\end{aligned}$$

H 3 (Trennung der Veränderlichen) (3 Punkte)
Finden Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems, und geben Sie den maximalen Existenzbereich der Lösung an.

$$y' = 1 - y^2, \ y(1) = 0.$$

Hinweis: Bei der Integration empfiehlt es sich, auf Partialbruchzerlegung zurückzugreifen.

Wir benutzen die Methode der Trennung der Veränderlichen mit $g(x) = 1$. Demnach gilt

$$\frac{y'}{1-y^2} = 1$$

und es folgt unter Verwendung von Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} x + c = \int 1 dx &= \int \tfrac{y'}{1-y^2} dx = \int \tfrac{y'}{(1-y)(1+y)} dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int y' \cdot \left(\tfrac{1}{1-y} + \tfrac{1}{1+y} \right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \left(-\ln|1-y| + \ln|1+y| + c \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \ln \left| \tfrac{1+y}{1-y} \right|. \end{aligned}$$

Also gilt

$$y(x) = \frac{e^{2(x+c)} + 1}{e^{2(x+c)} - 1} \quad \text{oder} \quad y(x) = \frac{e^{2(x+c)} - 1}{e^{2(x+c)} + 1}.$$

Damit die Anfangsbedinung erfüllt ist, muss der Zähler an der Stelle 1 verschwinden. Das ist bei der ersten Lösung aber nicht möglich. Also kommt nur die zweite Lösung mit $c = -1$ in Frage. Die Lösung

$$y(x) = \frac{e^{2(x-1)} - 1}{e^{2(x-1)} + 1}$$

ist auf gesamt $\mathbb{R}$ definiert.

H 4 (Zusatzaufgabe: Energierhaltung bei stationären Strömungen) (4 Punkte)
Eine zeitlich konstante Strömung einer Flüssigkeit mit konstanter Viskosität ν in einem Stömungsgebiet G kann mit den stationären Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f && \text{auf } G, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{auf } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G, \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei ist $u : G \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, $p : G \to \mathbb{R}$ der Druck und $f : G \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene Kraftdichte. Sei genauer G ein C^1-Normalbereich und f ein stetiges Vektorfeld. Seien außerdem u zweimal und p einmal stetig differenzierbar auf $\overline{G}$, so dass (1) erfüllt ist. Dabei sind alle Ableitungen komponentenweise zu verstehen. Das heißt z.B.

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

(1) $-\iiint_G \Delta u \cdot u \, dx = \iiint_G |\nabla u|^2 \, dx = \iiint_G \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_i u_k)^2 \, dx,$
(2) $\iiint_G \nabla p \cdot u \, dx = 0,$
(3) $\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx = -\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx = 0.$

(4) Folgern Sie die Gleichung

$$\nu \iiint_G |\nabla u|^2 dx = \iiint_G f \cdot u \, dx.$$

Das heißt, die Energie, die durch die Reibung der Flüssigkeitsteilchen aneinander vernichtet wird, ist gleich der durch die äußere Kraft f aufgebrachten Arbeit.

(1) Wegen $u|_{\partial G} = 0$ gilt nach der Greenschen Integralformel

$$-\sum_{i=1}^{3} \iiint_G \Delta u_i \cdot u_i \, dx = \sum_{i=1}^{3} \iiint_G \nabla u_i \cdot \nabla u_i \, dx = \sum_{k,i=1}^{3} \iiint_G (\partial_k u_i)^2 \, dx.$$

(2) Wegen $u|_{\partial G} = 0$ und $\operatorname{div} u = 0$ folgt aus G 1

$$\iiint_G \nabla p \cdot u \, dx = -\iiint_G p \operatorname{div} u \, dx = 0.$$

(3) Partielles Integrieren liefert

$$\begin{aligned}
\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx &= \sum_{j,k=1}^{3} \iiint_G u_k (\partial_k u_j) u_j \, dx \\
&= -\sum_{j,k=1}^{3} \iiint_G u_j \underbrace{\partial_k (u_k u_j)}_{=(\partial_k u_k) u_j + u_k (\partial_k u_j)} dx \\
&= -\sum_{j,k=1}^{3} \iiint_G u_k (\partial_k u_j) u_j \, dx - \sum_{j=1}^{3} \iiint_G u_j^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \partial_k u_k}_{=\operatorname{div} u = 0} dx \\
&= -\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx.
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx = 0$.
(4) Multipliziert man (1) mit u und integriert über G, so erhält man

$$-\nu \iiint_G \Delta u \cdot u \, dx + \iiint_G (u \cdot \nabla u) \cdot u \, dx + \iiint_G (\nabla p) \cdot u \, dx = \iint_G f \cdot u \, dx.$$

Verwendet man nun (1) – (3), so folgt

$$\nu \iiint_G |\nabla u|^2 dx = \iiint_G f \cdot u \, dx.$$