# 2. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

## Gruppenübungen

**G 1 (Divergenz)**

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x, y) = (y, \exp x)^T$. Berechnen Sie die Divergenz von $f$.
2. Die Abbildung $g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei auf dem Gebiet $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ gegeben durch $g(x, y, z) = (x, \cos z, z^3)^T$. Berechnen Sie die Divergenz von $g$.
3. Es sei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x, y, z) = xy$. Berechnen Sie $\operatorname{div}(\varphi g)$.

*1. Die Divergenz von $f$ ist $\operatorname{div}(f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \operatorname{div} f(x, y) = 0 + 0 = 0$.*

*2. Die Divergenz von $g$ ist $\operatorname{div}(g) : D \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{div} g(x, y, z) = 1 + 3z^2$.*

*3. Nach Skript Seite 38.2 gilt $\operatorname{div}(\varphi g) = \varphi \operatorname{div}(g) + \operatorname{grad}\varphi \cdot g$. Wegen $\operatorname{grad}\varphi(x, y, z) = (y, x, 0)^T$ ist $\operatorname{div}(\varphi g)(x, y, z) = 2xy + 3xyz^2 + x \cos z$.*

**G 2 (Green'scher Integralsatz)**

Sei $G := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und $f(x, y) = (-\exp y, xy + 1)^T$.

1. Berechnen Sie $\int_{\partial G} f \cdot dX$ mit Hilfe des Green'schen Integralsatzes.
2. Berechnen Sie nun das Integral aus dem ersten Aufgabenteil als Wegintegral und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Bestimmen Sie dazu eine geeignete Parametrisierung von $\partial G$.

*1. Nach dem Green'schen Integralsatz ist $\int_{\partial G} f \cdot dX = \int_G \operatorname{rot} f(x, y)\, d(x, y)$. Also gilt*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} f \cdot dX &= \int_0^1 \int_0^1 y + \exp y \, dy dx \\
&= \int_0^1 [\frac{1}{2} y^2 + \exp y]_0^1 \, dx \\
&= \int_0^1 e - \frac{1}{2} dx = e - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*2. Wir laufen auf dem Intervall $[0, 4]$ nacheinander die Kanten des Quadrats ab und erhalten so $X : [0, 4] \to \mathbb{R}^2$ mit* $X(t) = \begin{cases} w(t) = (t, 0), 0 \le t < 1 \\ x(t) = (1, t-1), 1 \le t < 2 \\ y(t) = (3-t, 1), 2 \le t < 3 \\ z(t) = (0, 4-t), 3 \le t \le 4 \end{cases}$ *. Damit gilt*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} f \cdot dX &= \int_0^1 f_1(w(t))\dot{w}_1(t) + f_2(w(t))\dot{w}_2(t)\, dt + \int_1^2 f_1(x(t))\dot{x}_1(t) + f_2(x(t))\dot{x}_2(t)\, dt \\
&= \int_2^3 f_1(y(t))\dot{y}_1(t) + f_2(y(t))\dot{y}_2(t)\, dt + \int_3^4 f_1(z(t))\dot{z}_1(t) + f_2(z(t))\dot{z}_2(t)\, dt \\
&= -\int_0^1 1\, dt + \int_1^2 t\, dt + \int_2^3 e\, dt - \int_3^4 1\, dt \\
&= e - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**G 3 (Gauß'scher Integralsatz)**

Berechnen Sie $\int_{\partial K} F \cdot N\, d\sigma$ für den Kreiszylinder $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le R^2, 0 \le z \le H\}, R, H > 0$, und das Vektorfeld

$$F : K \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (xz, yz, 3).$$

*Nach dem Gauß'schen Integralsatz gilt $\int_{\partial K} F \cdot N\, d\sigma = \int_K \operatorname{div} F(x, y, z)\, d(x, y, z)$. Mit Zylinderkoordinaten erhalten wir*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} F \cdot N\, d\sigma &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H r2z\, dz d\varphi dr \\
&= \pi H^2 R^2.
\end{aligned}$$

## Hausübungen

**H 1 (partielle Integration)**

Es sei $B_1(0)$ die Kugel um 0 mit Radius 1. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{B_1(0)} -(x+y+z)\left(\frac{x}{\sqrt[2]{1-x^2-y^2-z^2}}\right) d(x,y,z) = \int_{B_1(0)} (x+y+z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}\right) d(x,y,z).$$

Hinweis: Verwenden Sie $\int w^2 \sqrt[2]{1-w^2}\, dw = -\frac{w}{4}(\sqrt[2]{1-w^2})^3 + \frac{1}{8}(w\sqrt[2]{1-w^2} + \arcsin w)$.

*Wir setzen $f : B_1(0) \to \mathbb{R}, (x,y,z)^T \mapsto x+y+z$ und $g : B_1(0) \to \mathbb{R}, (x,y,z)^T \mapsto \sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}$. Mit partieller Integration erhalten wir dann*

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)} (x+y+z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}\right) d(x,y,z) &= -\int_{B_1(0)} \sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}\, d(x,y,z) \\ &\quad + \int_{\partial B_1(0)} (fg)(x,y,z) N_x\, d\sigma.\end{aligned}$$

*Da $g$ auf $\partial B_1(0)$ konstant den Wert 0 annimmt, ist in Polarkoordinaten*

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)} (x+y+z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}\right) d(x,y,z) &= -\int_0^{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 ((\cos\varphi) r^2 \sqrt[2]{1-r^2})\, dr d\varphi d\vartheta \\ &\overset{Hinweis}{=} -\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)\left(\frac{\pi}{16}\right) d\varphi d\vartheta \\ &= -\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

**H 2 (Green'scher Integralsatz)**

Es sei $G := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y, y^2 \le x\}$ und $f : G \to \mathbb{R}^2, (x,y)^T \mapsto (x+y^2, x^2-2xy)^T$.

1. Berechnen sie $\int_{\partial G} f \cdot dX$ mit Hilfe des Green'schen Integralsatzes.
2. Bestimmen Sie nun das Integral aus dem ersten Aufgabenteil als Wegintegral und vergleichen Sie.

1. *Nach dem Green'schen Integralsatz ist $\int_{\partial G} f \cdot dX = \int_G \operatorname{rot} f(x,y)\, d(x,y)$. Also gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\partial G} f \cdot dX &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[2]{x}} 2x - 4y\, dy dx \\ &= \int_0^1 2x\sqrt[2]{x} - 2x - 2x^3 + 2x^4 dx \\ &= \left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= -\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

2. *Um $\partial G$ zu parametrisieren wählen wir die Wege $x : [0,1] \to \mathbb{R}^2, x(t) = (t,t^2)^T$ und $y : [1,2] \to \mathbb{R}^2, y(t) = ((2-t)^2, 2-t)^T$. Es ist also $X : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ mit $X(t) = \begin{cases} x(t), 0 \le t < 1 \\ y(t), 1 \le t \le 2 \end{cases}$.*

*Dann ist*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} f \cdot dX &= \int_0^1 f_1(x(t))\dot{x}_1(t) + f_2(x(t))\dot{x}_2(t)dt + \int_1^2 f_1(y(t))\dot{y}_1(t) + f_2(y(t))\dot{y}_2(t)dt \\
&= \int_0^1 t + t^4 + 2t(t^2 - 2t^3)dt + \int_1^2 -4(2-t)^3 - ((2-t)^4 - 2(1-t)^3)dt \\
&= \int_0^1 -3t^4 + 2t^3 + tdt + \int_1^2 -2(2-t)^3 - (2-t)^4 dt \\
&= [-\frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2]_0^1 + [\frac{1}{2}(2-t)^4 + \frac{1}{5}(2-t)^5]_1^2 \\
&= -\frac{3}{5} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

**H 3 (Gauß'scher Integralsatz)**

Es sei $G := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq b\}, R, b > 0$, und das Vektorfeld $V : G \to \mathbb{R}^3$ sei durch $V(x,y,z) = e^z(y, x+y, 0)^T$ gegeben. Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für $V$ und $G$, indem Sie das Oberflächenintegral und das Volumenintegral berechnen.

*Wir können $\partial G$ in 3 Oberflächen $S_1, S_2, S_3$ zerlegen (die Mantelfläche und die zwei Deckel) mit*

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (a\cos u, a\sin u, v), u \in [0,2\pi], v \in [-b,b]\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (v\cos u, v\sin u, -b), u \in [0,2\pi], v \in [0,a]\},$$

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (v\cos u, v\sin u, b), u \in [0,2\pi], v \in [0,a]\}.$$

*Dazu gibt es die Normalenvektoren*

$$N_1(u,v) = (\cos u, \sin u, 0), N_2(u,v) = (0,0,-1), N_3(u,v) = (0,0,1).$$

*Daraus folgt*

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} V \cdot N \, d\sigma &= \int_{S_1} V \cdot N_1 \, d\sigma + \int_{S_2} V \cdot N_2 \, d\sigma + \int_{S_3} V \cdot N_3 \, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{b} a \exp v (a\sin u, a(\cos u + \sin u), 0)(\cos u, \sin u, 0) \, dvdu \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp(-b)(v\sin u, v(\cos u + \sin u), 0)(0,0,-1) \, dvdu \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^a \exp b (v\sin u, v(\cos u + \sin u), 0)(0,0,1) \, dvdu \\
&= a \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{b} \exp v (2a\cos u \sin u + a\cos^2 u) \, dvdu \\
&= a \int_0^{2\pi} (2a\sin u\cos u + a\cos^2 u)(\exp b - \exp(-b)) \, du \\
&= a(\exp b - \exp(-b))[a\sin^2 u + \frac{a}{2}(\sin u\cos u + u)]_0^{2\pi} \\
&= \pi a^2(\exp b - \exp(-b)).
\end{aligned}$$

*Andererseits gilt*

$$\begin{aligned}
\int_G \mathrm{div} V(x,y,z) \, d(x,y,z) &= \int_G \exp z \, d(x,y,z) \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{b} r \exp z \, dz d\varphi dr \\
&= (\exp b - \exp(-b)) 2\pi \int_0^a r \, dr \\
&= \pi a^2(\exp b - \exp(-b)).
\end{aligned}$$