13. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 **(Konvergenzbereiche von Laurentreihen)**
Zerlegen Sie die folgenden Laurentreihen in Haupt-und Regulärteil. Bestimmen und skizzieren Sie die Konvergenzbereiche von Haupt- und Regulärteil sowie den der Laurentreihe als Ganzes.

(a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j$

(b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} K^{-|j|} z^j$ mit einem $K > 0$

(a) Der Hauptteil $\sum_{j=-\infty}^{-1} z^j$ der Reihe kongergiert für $|z| > 1$. Der Reglärteil $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ konvergiert für $|z| < 1$. Also konvergiert die ganze Laurentreihe nirgendwo.

(b) Der Hauptteil $\sum_{j=-\infty}^{-1} K^{-|j|} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} K^{-|-j|} z^{-j}$ konvergiert, falls $\sqrt[j]{|K^{-|-j|}|z|^{-j}|} = \frac{1}{K|z|} < 1$, also falls $z > \frac{1}{K}$. Der Regulärteil konvergiert, falls $\sqrt[j]{K^{-|j|} z^j} = \frac{|z|}{K} < 1$, also falls $|z| < K$. Also konvergiert die gesamte Reihe nirgendwo, falls $\frac{1}{K} > K$, also, falls $K < 1$. Ansonsten konvergiert die Laurentreihe in dem Ring $\frac{1}{K} < |z| < K$.

G 2 **(Klassifizieren der isolierten Singularitäten)**
Bestimmen und klassifizieren Sie die Singularitäten der folgenden holomorphen Funktionen (definiert auf dem jeweils naheliegenden Definitionsbereich):

(a) $g(z) = \frac{1+z^2+z^4}{z^5}$

(b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^4}$

(c) $h(z) = \sin \frac{1}{z}$.

(a) 0 ist die einzige Singularität. Sie ist ein Pol der Ordnung 5, denn $f(z) = \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}$.

(b) 0 ist die einzige Singularität. Sie ist hebbar, da

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n)!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{4(n-1)}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{4n}}{(2n+2)!}$$

für $z \neq 0$ und daher $\lim_{z\to 0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

(c) 0 ist die einzige Singularität von h. Wegen

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)}$$

handelt es sich um eine wesentliche Singularität.

G 3 **(Laurentreihenentwicklung)**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{1,3\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}.$$

Entwickeln Sie die Funktion f in den drei Ringgebieten

$$R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}, \quad R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}, \quad R_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$$

in eine Laurentreihe.
Hinweis: Partialbruchzerlegung, geometrische Reihe.

$f(z) = \frac{2}{z^2-4z+3} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}$, weiter mit der geometrischen Reihe:

- *für $0 < |z| < 1$ ist $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ und*
  $\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3-z} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}$,
  somit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{3^{k+1}})z^k$ für $z \in R_1$,
  die Laurentreihe ist also gleich der Potenzreihenentwicklung von f um 0.

- *für* $1 < |z|$ *ist* $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^k = -\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{k+1}$,
  für $|z| < 3$ *ist* $\frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{3^{k+1}}$ *(s.o.)*,
  somit $f(z) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)z^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)\frac{1}{3^{k+1}}z^k}_{\text{Regulärteil}}$ *für* $z \in R_2$.
- *für* $|z| > 3$ *ist* $\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{3}{z})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{k+1}}$
  und für $1 < |z|$ *ist* $\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^{k+1}$ *(s.o.)*,
  somit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(3^k - 1)\frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{-\infty}^{-1}(3^{-k-1} - 1)z^k$ *für* $z \in R_3$.

Hausübungen

H 1 (Residuum)
Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in den isolierten Singularitäten

$$f_1(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4}z^2}, \quad f_2(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}.$$

(a) $f_1(z)$ *hat zwei Singularitäten in den Punkten* $z = 0$, $z = \pi/4$.

(a) $\mathbf{z = 0}$
In 0 hat $f_1(z)$ *eine hebbare Singularität, da*

$$\lim_{z\to 0} f_1(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi},$$

deshalb $\operatorname{Res} f_1(0) = 0$.

(b) $\mathbf{z = \pi/4}$

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f_1(z) = \infty,$$

deshalb hat $f_1(z)$ *in* $\pi/4$ *einen Pol der Ordnung* 1. *Dann*

$$\operatorname{Res} f_1(\frac{\pi}{4}) = \lim_{z\to\pi/4}\left(f_1(z)\,(z-\frac{\pi}{4})\right) = \frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}.$$

(b) $f_2(z)$ *hat die Laurent-Reihe im Entwicklungspunkt* 0*:*

$$f_2(z) = z^3(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \dots) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \dots$$

0 *ist eine wesentliche Singularität und* $\operatorname{Res} f_2(0) = 0$, *der Koeffizient vor* z^{-1}.

H 2 (Residuensätze)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(i)\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\sin z}dz \qquad (ii)\int_0^{2\pi}\frac{e^{ix}}{5+4\cos x}dx \qquad (iii)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$(iv)\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx \qquad (v)\int_{|z|=1}\frac{1}{|z|}dz$$

Hinweise: zu (ii): Schreiben Sie das Integral als komplexes Wegintegral einer geeigneten Funktion längs des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{it}$; zu (iv): Symmetrie!

(i) Auf $B_1(0)$ *ist* $z_0 = 0$ *eine einfache Polstelle von* $z \mapsto \frac{e^z}{\sin z}$, *d.h. es folgt aus (7) im Buch auf Seite 195, dass*

$$Res(\frac{e^z}{\sin z}, 0) = \frac{e^0}{\cos 0} = 1.$$

Somit gilt

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{\sin z}dz = 2\pi i \cdot Res(\frac{e^z}{\sin z}, 0) = 2\pi i.$$

(ii)

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{5+4\cos x}dx = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{5+2(e^{ix}+e^{-ix})x}dx = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{ix}}{5+2(e^{ix}+e^{-ix})x}dx$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(x)}{5+2(\gamma(x)+\frac{1}{\gamma(x)})}dx = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{1}{5+2(z+\frac{1}{z})}dz = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{5z+2z^2+2}dz$$

Nennernullstellen sind -2 und $-\frac{1}{2}$ (beide einfach).
Die Polstelle $z=-2$ der Funktion $z \mapsto \frac{z}{5z+2z^2+2}$ liegt nicht in $B_1(0)$,

$$Res(\frac{z}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}, -\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2}}{2(-\frac{1}{2}+2)} = -\frac{1}{6},$$

somit

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{5+4\cos x}dx = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{5z+2z^2+2}dz = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \cdot (-\frac{1}{6}) = -\frac{\pi}{3}.$$

(iii) $f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$, daher sind i und $-i$ Polstellen 2. Ordnung. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i \cdot Res(f,i) = \frac{\pi}{2},$$

wobei nach (8) im Buch auf Seite 195

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2 \cdot \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}}{1!} = \frac{-2}{(i+i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

(iv) $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx$ aus Symmetriegründen. $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$ hat die Polstellen $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \underbrace{e^{i\frac{5\pi}{4}}}_{Im(\cdot)<0}, \underbrace{e^{i\frac{7\pi}{4}}}_{Im(\cdot)<0}$ (alle einfach). Wir berechnen also die Residuen der Singularitäten in der oberen Halbebene:

$$Res(f, \frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{2}}{4(1+i)}, \qquad Res(f, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{-i\sqrt{2}}{4(1+i)}.$$

Es ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i(Res(f,e^{i\frac{\pi}{4}}) + Res(f,e^{i\frac{3\pi}{4}})) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(v) $z \to \frac{1}{|z|}$ ist auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ nicht holomorph, weshalb der Residuensatz nicht anwendbar ist. Es gilt aber

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{|z|}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{1}dt = 0.$$