12. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Die korrigierten Hausübungen dieses Übungsblattes können nicht mehr in den Übungen zurückgegeben werden. Sie können sie in den üblichen Sprechstunden der Tutoren abholen.

Gruppenübungen

G 1 (Cauchysche Integralformel)
Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\, \mathrm{d}\, z.$$

Die Funktion $\sin z$ *ist in ganz* $\mathbb{C}$ *holomorph. Die einfache Nullstelle* $z_0 := -i$ *des Nenners liegt im Inneren des Integrationsweges* $\{|z| = 2\}$. *Die Cauchysche Integralformel liefert daher*

$$I = 2\pi i \sin(-i) = 2\pi i \frac{e - 1/e}{2i} = \pi(e - 1/e) = 2\pi \sinh 1.$$

G 2 (Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel)
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes oder der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{K_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, \mathrm{d}\, z,\ i = 1, 2, 3,$$

mit

(i) $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = 2 + e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$,
(ii) $K_2 = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = 2 + 3e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$,
(iii) $K_3 = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = 2 + 5e^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$.

(i) Die Funktion $\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ *ist holomorph in einer Umgebung von* $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 1\}$ *und* $z(t)$ *ist geschlossen. Deshalb ist nach dem Cauchyschen Integralsatz*

$$\int_{K_1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, \mathrm{d}\, z = 0.$$

(ii) Im Inneren von $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 3\}$ *liegt nur eine Nullstelle des Nenners* $z = 0$. *In diesem Fall gilt nach der Cauchyschen Integralformel*

$$\int_{K_2} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\, \mathrm{d}\, z = 2\pi i \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.$$

(iii) Im Inneren von $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 5\}$ *liegen zwei Nullstellen des Nenners* $z = 0$, $z = 6$. *In diesem Fall betrachten wir zunächst die Partialbruchzerlegung des Ausdrucks* $\frac{1}{z^2-6z}$

$$\frac{1}{z^2 - 6z} = \frac{A}{z-6} + \frac{B}{z},$$

d.h. $A = 1/6$ *und* $B = -1/6$. *Nun können wir das Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel berechnen,*

$$\begin{aligned}\int_{K_3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}\, \mathrm{d}\, z &= \frac{1}{6}\int_{K_3} \frac{e^{z^2}}{z-6}\, \mathrm{d}\, z - \frac{1}{6}\int_{K_3} \frac{e^{z^2}}{z}\, \mathrm{d}\, z \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{z^2}\Big|_{z=6} - \frac{1}{6} e^{z^2}\Big|_{z=0} \right) = \frac{\pi i}{3}\left(e^{36} - 1\right).\end{aligned}$$

G 3 (Maximum einer Funktion)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |-4 + 6z - z^2|$. Bestimmen Sie $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z_0) = \max_{z\in G} f(z)$$

mit $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \le 1\}$.
Hinweis: Benutzen Sie das Maximumprinzip.

Da G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f auf G holomorph ist, folgt mit dem Satz vom Maximum, dass z_0 auf der Kurve

$$K = \{z \in \mathbb{C} : z(t) = 3 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$$

liegt. Nun gilt

$$\begin{aligned}
|-4 + 6z(t) - z(t)^2|^2 &= |-4 + 6(3 + e^{it}) - (3 + e^{it})^2|^2 \\
&= |-4 + 18 + 6e^{it} - 9 - 6e^{it} - e^{2it}|^2 \\
&= |5 - e^{2it}|^2 = |5 - \cos(2t) - i\sin(2t)|^2 \\
&= (5 - \cos(2t))^2 + \sin^2(2t) \\
&= 25 - 10\cos(2t) + 1 = 26 - 10\cos(2t).
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird maximal, wenn $\cos(2t) = -1$, also für $t = \pi/2$ und $t = 3\pi/2$. Wir haben demnach zwei Lösungen für z_0. Das Maximum wird an den Stellen

$$3 + e^{i\pi/2} = 3 + \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 3 + i$$

und

$$3 + e^{i3\pi/2} = 3 + \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) = 3 - i$$

angenommen und hat den Wert $f(z_0) = \sqrt{36} = 6$.

Hausübungen

H 1 **(Cauchysche Integralformel)** (3 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$J = \int_C \frac{ze^z}{z^2 + 4}\,\mathrm{d}\,z,$$

wobei C eine positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt $2i$ und Radius 2 ist.

Es gilt

$$\frac{ze^z}{z^2 + 4} = \frac{ze^z}{(z + 2i)(z - 2i)} = \frac{ze^z}{z + 2i} \cdot \frac{1}{z - 2i},$$

wobei nur die Nullstelle $2i$ des Nenners im Inneren der Kreislinie liegt und die Funktion $\frac{ze^z}{z+2i}$ holomorph in einer Umgebung von $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| \le 2\}$ ist. Deshalb liefert die Cauchysche Integralformel

$$J = \int_C \frac{ze^z}{z + 2i} \cdot \frac{1}{z - 2i}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i \frac{ze^z}{z + 2i}\bigg|_{z=2i} = \pi(i\cos 2 - \sin 2).$$

H 2 **(Cauchysche Integralformel)** (3 Punkte)
Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z/z}{(z - 1)^3}\,\mathrm{d}\,z.$$

Die Funktion $f(z) := e^z/z$ ist in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, also in einer Umgebung der abgeschlossenen Scheibe $\{|z - 3/2| \le 1\}$, holomorph. Es ist

$$f'(z) = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2} \quad \textit{und} \quad f''(z) = \frac{e^z}{z} - \frac{2e^z}{z^2} + \frac{2e^z}{z^3}.$$

Also liefert die Cauchysche Integralformel für die zweite Ableitung

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z/z}{(z - 1)^3}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i \frac{f''(1)}{2} = i\pi e.$$

H 3 **(Cauchysche Integralformel)** (4 Punkte)
Gegeben sei die Kurve K durch die Parametrisierung

$$W : \varphi(t) = 2\sin t - 2i\sin 2t,\ t \in [0, 2\pi].$$

(i) Skizzieren Sie $\varphi(t)$ in der komplexen Ebene und deuten Sie durch mehrere Pfeilen die Orientierung der Kurve K an.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel das Kurvenintegral

$$\int_K \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z.$$

Hinweis: Beachten Sie die Parametrisierung der Kurve K und benutzen Sie die Eigenschaften des Wegintegrals.

(i) Die Abbildung $\varphi(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, beschreibt eine „liegende Acht", die nacheinander die Punkte 0 (für $t = 0$), $\sqrt{2} - 2i$ (für $t = \pi/4$), 2 (für $t = \pi/2$), $\sqrt{2} + 2i$ (für $t = 3\pi/4$), 0 (für $t = \pi$), $-\sqrt{2} - 2i$ (für $t = 5\pi/4$), -2 (für $t = 3\pi/2$), $-\sqrt{2} + 2i$ (für $t = 7\pi/4$) und 0 (für $t = 2\pi$) durchläuft. Der Teil der Kurve K in der rechten Halbebene (für $t \in [0, \pi]$) ist deshalb positiv orientiert und der Teil in der linken negativ (für $t \in [\pi, 2\pi]$).
(ii) Um die Cauchysche Integralformel anwenden zu können, teilen wir zuerst die Kurve K in zwei geschlossene, positiv orientierte, glatte und doppelpunktfreie Kurven K_1 und K_2, die den Teilen der Kurve K in der rechten bzw. linken Halbebene (hier bis auf Orientierung) entsprechen. Für den Weg W erhalten wir daher

$$W = W_1 \oplus (-W_2),$$

wobei W_1: $\varphi(t)$, $t \in [0, \pi]$, und W_2: $\varphi(3\pi - t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$, die Parametrisierungen von K_1 und K_2 sind. Nun benutzen wir die Eigenschaften des Wegintegrals, und zwar

$$\begin{aligned}\int_K \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z &= \int_W \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z = \int_{W_1\oplus(-W_2)} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z = \int_{W_1} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z + \int_{-W_2} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z \\ &= \int_{W_1} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z - \int_{W_2} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z = \int_{K_1} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z - \int_{K_2} \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z.\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners von $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ sind ± 1, davon liegt 1 im Innengebiet von K_1 und -1 im Innengebiet von K_2. Die Cauchysche Integralformel liefert daher

$$\int_K \frac{1}{z^2-1}\,\mathrm{d}\,z = \int_{K_1} \frac{1/(z+1)}{z-1}\,\mathrm{d}\,z - \int_{K_2} \frac{1/(z-1)}{z+1}\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i \frac{1}{z+1}\Big|_{z=1} - 2\pi i \frac{1}{z-1}\Big|_{z=-1} = 2\pi i.$$