11. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 Komplexe Differenzierbarkeit

Geben Sie den Bereich D an, auf dem die folgenden Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind, und berechnen Sie die komplexe Ableitung.

1. $f_1(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}(z-2i)^k$,
2. $f_2(z) = \frac{z+1}{z^2+(i-1)z-i}$.

1. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(k+1)^2}{k^2}\right| = 1$. *Nach dem Quotientenkriterium hat die Potenzreihe den Konvergenzradius 1. Die Funktion ist also auf der offenen Kreisscheibe um* $2i$ *mit Radius* 1, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| < 1\}$, *holomorph und hat die Ableitung* $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(z-2i)^{k-1}$.

2. Die Nullstellen des Nenners der rationalen Funktion sind 1 *und* $-i$. *Im Gebiet außerhalb dieser beiden Punkte ist die Funktion holomorph und hat nach der Quotientenregel die Ableitung*

$$\frac{z^2+(i-1)z-i-(2z+(i-1))(z+1)}{(z^2+2(i-1)z-i)^2} = \frac{-z^2-2(z+i)+1}{(z+i)^2(z-1)^2}.$$

G 2 Cauchy-Riemann

Untersuchen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ob die folgenden Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind. Wenn ja, geben Sie einen möglichst großen Bereich D und die erste Ableitung an.

1. $f_1(z) = \sin(iz)$,
2. $f_2(z) = |z|$,
3. $f_3(z) = z^3 - iz$.

1. Wir verwenden das Additionstheorem für die komplexe Sinusfunktion, um sie in Real- und Imaginärteil zu zerlegen,

$$\begin{aligned} \sin(iz) &= \sin(ix-y) = \sin(ix)\cos(y) + \sin(y)\cos(ix) \\ &= \frac{1}{2i}(e^{-x}-e^{x})\cos(y) + \sin(y)\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x}) \\ &= i\sinh(x)\cos(y) - \sin(y)\cosh(x). \end{aligned}$$

Die Funktionen $u(x,y) = -\sin(y)\cosh(x)$ *und* $v(x,y) = \sinh(x)\cos(y)$ *sind überall partiell differenzierbar und haben die partiellen Ableitungen* $u_x(x,y) = -\sin(y)\sinh(x)$,$u_y(x,y) = -\cos(y)\cosh(x)$ *und* $v_x(x,y) = \cos(y)\cosh(x)$, $v_y(x,y) = -\sin(y)\sinh(x)$, *also sind die Cauchy-Riemann'schen DGLn erfüllt,* $D = \mathbb{C}$ *und* $f_1'(z) = -\sin(y)\sinh(x) + i\cos(y)\cosh(x)$.

2. Der Imaginärteil der Betragsfunktion ist 0 *und der Realteil ist gegeben durch* $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. *Diese Funktion ist nur in* 0 *nicht partiell differenzierbar. Überall sonst ergeben sich die stetigen partiellen Ableitungen* $u_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$ *und* $u_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0$. *Die Betragsfunktion ist also nicht holomorph.*

3. Die Funktion lässt sich zerlegen in $f_3(x+iy) = x^3-3y^2x+y+i(3x^2y-y^3-x)$. *Der Real- und Imaginärteil* u *bzw.* v *sind jeweils überall stetig partiell differenzierbar mit den Ableitungen* $u_x(x,y) = 3x^2-3y^2$, $u_y(x,y) = -6yx+1$ *und* $v_x(x,y) = 6xy-1$, $v_y(x,y) = 3x^2-3y^2$, *die Cauchy-Riemann'schen DGLn sind also erfüllt,* $D = \mathbb{C}$ *und* $f_3'(z) = 3z^2 - i$.

G 3 Komplexe Wegintegrale

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{z^2}$.

1. Berechnen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion das Wegintegral

$$\int_{W_i} f(z)\,dz, \qquad i = 1,2,3$$

entlang der folgenden Wege

(a) W_1 ist gegeben durch die Parametrisierung $z(t) = -i + e^{it}, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}]$,

(b) W_2 verläuft entlang der Geraden $y = -it, t \in [0,2]$.

2. Berechnen Sie für den Weg W_2 das Wegintegral unter Verwendung geeigneter reeller Integrale.

1. *Die Funktion* $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, F(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$ *ist eine Stammfunktion von* f *auf* $\mathbb{C}$. *Für die Wegintegrale ergibt sich also*
$$\int_{W_1} f(z)\,dz = \int_{W_2} f(z)\,dz = F(-2i) - F(0) = \frac{1}{2}(e^{-4} - 1).$$

2. *Es gilt*
$$\begin{aligned} ze^{z^2} &= (x+iy)\exp\left((x+iy)^2\right) \\ &= \exp(x^2-y^2)(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)) + i\exp(x^2-y^2)(y\cos(2xy) + x\sin(2xy)), \end{aligned}$$
also
$$\begin{aligned} u(x,y) &= \exp(x^2-y^2)(x\cos(2xy) - y\sin(2xy)), \\ v(x,y) &= \exp(x^2-y^2)(y\cos(2xy) + x\sin(2xy)). \end{aligned}$$
Weiterhin gilt
$$x(t) = 0,\ x'(t) = 0,\ y(t) = -t,\ y'(t) = -1.$$
Also ist
$$\begin{aligned} \int_{W_2} f(z)dz &= \int_0^2 v(x(t),y(t))\,dt - i\int_0^2 u(x(t),y(t))\,dt \\ &= \int_0^2 (-t)(e^{-t^2})\,dt = \frac{1}{2}(e^{-4} - 1). \end{aligned}$$

Hausübungen

H 1 Komplexe Differenzierbarkeit (4 Punkte)

Untersuchen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ob die folgenden drei Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

1. $f_1(z) = \frac{1}{z^2}, \quad D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$,
2. $f_2(z) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad D = \mathbb{C}$,
3. $f_3(z) = i(\overline{z} - z) - i(z + \overline{z}), \quad D = \mathbb{C}$.

1. *Zuerst zerlegen wir die Funktion in Real- und Imaginärteil,*
$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z}^2}{|z|^4} = \frac{x^2-y^2}{|z|^4} - i\frac{2xy}{|z|^4}.$$
Die Funktionen $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ *und* $v(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$ *sind außer in* 0 *stetig partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen* $u_x(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2)-4x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$, $u_y(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2)-4y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-6yx^2+2y^3}{(x^2+y^2)^3}$ *und* $v_x(x,y) = \frac{-2y(x^2+y^2)+8x^2y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}$, $v_y(x,y) = \frac{-2x(x^2+y^2)+8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$. *Also sind auch die Cauchy-Riemann'schen DGLn erfüllt und* f_1 *ist in* D *holomorph.*

2. *Die Funktion* $\cosh z$ *ist gegeben durch*
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{x+iy} + e^{-x-iy}) &= \frac{1}{2}(e^x(\cos(y) + i\sin(y)) + e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y))) \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos(y) + i\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin(y) \\ &= \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y). \end{aligned}$$
Der Real- und Imaginärteil sind also jeweils stetig partiell differenzierbar und man rechnet leicht nach, dass die Cauchy-Riemann'schen DGLn erfüllt sind.

3. *Der Realteil der Funktion ist* $u(x,y) = 2y$ *und der Imaginärteil ist* $v(x,y) = -2x$. *Die Funktionen sind stetig partiell differenzierbar und die Cauchy-Riemann'schen DGLn sind erfüllt.*

H 2 Ergänzung zu einer holomorphen Funktion (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle Funktionen $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Geben Sie f als Funktion von z an.

Es sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Damit $u + iv$ holomorph ist, müssen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6y^2 + 2x \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 12xy + 2y + 1 \tag{2}$$

*erfüllt sein. Betrachten wir für festes x die stetig differenzierbare Funktion $y \to v(x,y)$, so ist aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (**??**) genau dann erfüllt, wenn*

$$v(x,y) = v(x,0) + \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y}(x,t)\,dt = v(x,0) + 6x^2y - 2y^3 + 2xy\,.$$

*Es muss also $v(x,y) = w(x) + 6x^2y - 2y^3 + 2xy$ gelten, wobei $w(x) := v(x,0)$ stetig differenzierbar ist. Nun ist Gleichung (**??**) genau dann erfüllt, wenn*

$$w'(x) + 12xy + 2y = 12xy + 2y + 1 \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dies ist äquivalent zu $w'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $w(x) = x + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Die möglichen Funktionen v sind also genau diejenigen der Gestalt

$$v(x,y) = x + 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

Zusammensetzen ergibt $u + iv(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y + i(x + 6x^2y - 2y^3 + 2xy + C)$. Das kann man auch schreiben als $f(z) = 2z^3 + z^2 + iz + iC$.

H 3 Komplexe Wegintegrale (4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = 3iz^2 - 4z + 5i$ eine komplexwertige Funktion und W der Weg auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten in positiver Richtung.

1. Berechnen Sie das Wegintegral mit Hilfe einer Stammfunktion.
2. Berechnen Sie das Wegintegral mit Hilfe von reellen Integralen.
3. Wir betrachten nun den geschlossenen Weg Y, der den Viertel-Einheitskreis im ersten Quadranten einschließt und aus dem Weg W und Geradenstücken auf der $x-$ und $y-$Achse besteht.

(a) Schreiben Sie das Wegintegral $\int_Y g(z)dz$ erst wieder als Summe von zwei reellen Integralen und dann mit Hilfe der Integralsätze von Green und Gauss in zwei reelle Flächenintegrale um. Welchen Wert nimmt das Integral an?

(b) Berechnen Sie das Wegintegral mit einer der Methoden aus 1. oder 2.

1. *Die Funktion $G(z) = iz^3 - 2z^2 + 5iz$ ist auf $\mathbb{C}$ eine Stammfunktion von g. Das Wegintegral hat also den Wert*
$$\int_W g(z)\,dz = G(i) - G(1) = i^4 - 2i^2 + 5i^2 - i + 2 - 5i = -6i.$$

2. *Der Real- bzw. Imaginärteil von g sind $u(x,y) = -6xy - 4x$ bzw. $v(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 4y + 5$. Für den Weg gilt $W(t) = x(t) + iy(t) = \cos t + i \sin t$. Also ist das Wegintegral*
$$\begin{aligned}
\int_W g(z)\,dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-u(\cos t, \sin t)\sin t - v(\cos t, \sin t)\cos t)\,dt \\
&\quad + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-v(\cos t, \sin t)\sin t + u(\cos t, \sin t)\cos t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6\cos t\sin^2 t + 4\cos t\sin t - 3\cos^3 t + 3\sin^2 t\cos t + 4\sin t\cos t - 5\cos t)\,dt \\
&\quad + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-6\cos^2 t\sin t - 4\cos^2 t - 3\cos^2 t\sin t + 3\sin^3 t + 4\sin^2 t - 5\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\cos t\sin^2 t + 8\cos t\sin t - 3\cos^3 t - 5\cos t)\,dt \\
&\quad + i\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-9\cos^2 t\sin t - 4(\cos^2 t - \sin^2 t) + 3\sin^3 t - 5\sin t)\,dt \\
&= [3\sin^3 t + 4\sin^2 t - 2\sin^3 t - 3\cos^2 t\sin t - 5\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + i[3\cos^3 t - 4\cos t\sin t - 2\cos^3 t - 3\sin^2 t\cos t + 5\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 3 + 4 - 2 - 5 + i(-3 + 2 - 5) = -6i.
\end{aligned}$$

3. *Wir parametrisieren und zerlegen den Weg Y in $Y(t) = \begin{cases} e^{\frac{\pi}{2}it} & t \in [0,1] \\ 2i - it & t \in (1,2] \\ t - 2 & t \in (2,3] \end{cases} = x(t) + iy(t)$. Wie in 2. gilt*
$$\int_Y g(z)\,dz = \int_0^3 u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t)\,dt + i\int_0^3 u(x(t),y(t))\dot{y}(t) + v(x(t),y(t))\dot{x}(t)\,dt.$$
Wenn wir Y als Weg in $\mathbb{R}^2$ auffassen, ist die Normale an Y in $(x(t),y(t))^T$ durch $(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))^T$ gegeben. Wir betrachten das Vektorfeld $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $G(x,y) = (v(x,y), u(x,y))$. Dann können wir $\int_Y g(z)dz$ als die Summe der reellen Wegintegrale
$$-\int_Y G \cdot N\,d\sigma + i\int_Y G \cdot\, dY,$$
schreiben. Wir bezeichnen das von Y eingeschlossene Gebiet mit D. Nach dem Satz von Green und dem Satz von Gauss gilt
$$\int_Y g(z)\,dz = -\int_D \operatorname{div} G(x,y)\,d(x,y) + i\int_D \operatorname{rot} G(x,y)\,d(x,y).$$
Weil g eine holomorphe Funktion ist, gilt mit den Cauchy-Riemann'schen DGLn $\operatorname{rot} G = u_x - v_y = 0$ und $\operatorname{div} G = v_x + u_y = 0$, also $\int_Y g(z)\,dz = 0$.
Mit der Methode aus 1. über die Stammfunktion ist klar, dass das Wegintegral über den geschlossenen Weg den Wert 0 annimmt. Dabei ist zu beachten, dass das von Y eingeschlossene Gebiet im Holomorphiebereich von g liegt.