10. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 (Komplexe Zahlen)

(a) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag, das Argument (den Winkel φ) und die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $z = 1 + i$ an.

(b) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3, \qquad z_2 = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n},\ n \in \mathbb{N}.$$

(c) Beschreiben Sie geometrisch und skizzieren Sie in der komplexen Ebene die folgenden Mengen.
$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$
$C = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq |z+1|\}$

(a) $\operatorname{Re} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$, *also* $\arg z = \frac{\pi}{4}$ *und* $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

(b) $z_1 = \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^3 = i^3 = -i$, *deshalb* $\operatorname{Re} z_1 = 0$ *und* $\operatorname{Im} z_1 = -1$.
Weil $1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, $z_2 = 2^n(e^{ni\pi/2} + e^{-ni\pi/2}) = 2^n 2 \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ (-1)^k 2^{2k+1}, & \text{für } n = 2k. \end{cases}$
Das ist auch der Realteil und deshalb $\operatorname{Im} z_2 = 0$.

(c) A: offener Kreisring mit Mittlepunkt 0 und Radien 1 und 2
B: Winkelraum im ersten Quadranten zwischen der Winkelhalbierenden und der imaginären Achse
C: rechte Halbebene einschließlich der imaginären Achse als Grenzgerade

G 2 (Folgen, Reihen, Potenzreihen)

(a) Überprüfen Sie die Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

$$z_n = \frac{3n^5+1}{n^5+2n} + i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3i)n}{(1-i)^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2}\right).$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe in $\mathbb{C}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} z^n$$

(a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{2}{n^4}} + i(1+\frac{1}{n})^n\right) = 3 + ie$.

(b) (i) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|5+3i|\cdot n}{|1-i|^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{34}}\cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. *Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3i)n}{(1-i)^n}$ *(sogar absolut).*
(ii) Falls diese Reihe konvergiert, dann muss $|z_n| = |\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2}|$ *für* $n \to \infty$ *gegen 0 konvergieren.*
Aber zum Beispiel für ungerades $n := 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, *haben wir*

$$|z_n| = |z_{2k+1}| = |\tfrac{1}{2} + (-1)^k \tfrac{i}{2}| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Daher besitzt z_n *eine Teilfolge* z_{2k+1}, *die nicht gegen 0 konvergiert, d.h.* z_n *konvergiert nicht gegen 0.*

(c) Es gilt $\frac{(2n)!}{n^{2n}} \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{4(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})} \quad \to \frac{e^2}{4}$.
Also ist der Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium $r = e^2/4$.

G 3 (Eigenwertproblem)
Geben Sie in Abhängigkeit von λ alle Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ y(-l) = 0,\ y'(l) = 0,$$

mit festem $l > 0$ an.
Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$. Beachten Sie, dass die triviale Lösung keine Eigenfunktion ist.

1. $\lambda < 0$: In diesem Fall sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gleich $\pm\sqrt{-\lambda}$, das Fundamental system sind die Funktionen $e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$ und die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen liefern das folgende Gleichungssystem für die konstanten c_1, c_2

$$\begin{aligned} c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} &= 0 \\ c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $c_1 = c_2 = 0$ und damit hat das Eigenwertproblem für $\lambda < 0$ nur die triviale Lösung $y \equiv 0$.
2. $\lambda = 0$: Die allgemeine Lösung ist $y(x) = c_1 x + c_2$. Auch in diesem Fall lassen sich die Randwertbedingungen nur trivial befriedigen.
3. $\lambda > 0$: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\pm i\sqrt{\lambda}$ und die Funktionen $\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ bilden ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randbedingungen ergeben

$$c_1\cos(\sqrt{\lambda}l) - c_2\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \tag{1}$$
$$-c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{2}$$

Damit ist $c_1 = c_2\tan(\sqrt{\lambda}l)$ und, da wir eine nichttriviale Lösung wollen,

$$c_2(\tan(\sqrt{\lambda}l) - \cot(\sqrt{\lambda}l)) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \tan(\sqrt{\lambda}l) = \cot(\sqrt{\lambda}l) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\lambda}l = (2k+1)\frac{\pi}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{\lambda} = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{4}}{l}$$
$$\Leftrightarrow\quad \lambda = \lambda_k = \frac{(2k+1)^2\frac{\pi^2}{16}}{l^2},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Jetzt wählen wir nur geschickt die Konstante $0 \neq c_2 := \cos(\sqrt{\lambda}l)$ und deswegen $c_1 = \sin(\sqrt{\lambda}l)$. Daraus erhalten wir die nichttrivialen Lösungen $y_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}l)\cos(\sqrt{\lambda_k}x) + \cos(\sqrt{\lambda_k}l)\sin(\sqrt{\lambda_k}x) = \sin(\sqrt{\lambda_k}(x+l))$. Das heißt,

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{(2k+1)\frac{\pi}{4}}{l}(x+l)\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Hausübungen

H 1 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Formel $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z}$.

(b) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ungerade Zahl ist.
Hinweis: $\bar{z} = \frac{1}{(1-i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n}$.

(c) Beschreiben Sie geometrisch und skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$ in der komplexen Ebene.
Hinweis: Betrachten Sie $z = x + iy$ und formen Sie die Gleichung für z in eine Gleichung für x und y um.

(a) Sei $z = x + iy$ mit $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$. Dann gilt

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| = |\underbrace{e^x}_{>0}| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}}_{=1} = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
|z|^2 = z\bar{z} &= \left(\frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n}\right)\left(\frac{1}{(1-i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n}\right) \\
&= \frac{1}{(1+i)^{2n}} + \frac{1}{(1-i)^{2n}} + \frac{1}{((1+i)(1-i))^n} \\
&= \frac{1}{(2i)^n} + \frac{1}{(-2i)^n} + \frac{2}{2^n}.
\end{aligned}$$

Da n ungerade ist, folgt daraus $|z|^2 = \frac{2}{2^n} = 2^{1-n}$. Damit $|z| = 2^{\frac{1-n}{2}}$.

(c) Sei $z = x + iy$. Dann gilt $|z - i| + |z + i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} &= 4 \\
\sqrt{x^2 + (y+1)^2} &= 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\
x^2 + (y+1)^2 &= 16 - 8\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + x^2 + (y-1)^2 \\
2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} &= 4 - y \\
4x^2 + 3y^2 &= 12 \\
\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

(Potenzieren ist zwar keine äquivalente Umformung, aber Einsetzen liefert, dass jede Lösung der letzten Gleichung auch die Lösung der ersten ist.) Wir sehen, dass die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$ eine Ellipse mit Mittlepunkt 0, großer Achse auf der imaginären Achse, den Scheiteln $\pm\sqrt{3}$, $\pm 2i$ und den Brennpunkten $\pm i$ ist.

H 2 (Folgen, Reihen, Potenzreihen) (5 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

$$(i)\ z_n = \frac{n + in^2}{n^2 - in}, \qquad (ii)\ z_n = \frac{n}{n+1} e^{i\pi n}.$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe in (i) auf Konvergenz. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe in (ii)? Berechnen Sie ihre Summe.

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2+i)^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2} z^n.$$

Konvergiert die Reihe auf dem Rand des Konvergenzkreises?

(a) (i) $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + in^4 + in^2 - n^3}{n^4 + n^2} = \lim_{n\to\infty} i\frac{n^4 + n^2}{n^4 + n^2} = i$.
(ii) Die Folge $z_n = \frac{n}{n+1} e^{i\pi n} = \frac{n}{n+1}(\cos(\pi n) + i \sin(\pi n)) = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ konvergiert nicht, weil $\limsup_{n\to\infty} z_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} z_n = -1$.

(b) (i) Es gilt $\sqrt[n]{\left|\frac{n}{(2+i)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{5}} \to \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$. Also konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

(ii) Diese Reihe ist eine geometrische Reihe, die für $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1$ konvergiert. $|z + 1| < |z - 1|$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z < 0$. In diesem Fall ist auch die Summe gleich $\frac{1}{1-(z+1)/(z-1)} = \frac{1-z}{2}$.

(c) *Es gilt* $r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+i)^n}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{(1+i)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Für $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *gilt* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+i)^n}{n^2}z^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$. *Also konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n^2}z^n$ *(absolut) für alle* $z\in\mathbb{C}$ *mit* $|z| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

H 3 (Zusatzaufgabe) **(Noch eine Weihnachtsaufgabe: Wärmeleitungsgleichung)** (5 Punkte)
Nachdem der Weinachtsmann alle Geschenke verteilt hatte, ist er nun auf seinem Schlitten auf dem Rückweg in den hohen Norden. Dabei durchquert er die verschiedensten Länder, wobei sich die Temperatur der Kufen seines Schlittens ändert. Die Temperaturverteilung soll durch das folgende Anfangs-Randwertproblem für die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden ($' := \frac{\partial}{\partial x}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad & \text{auf } \left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\times(0,T)\\
u(x,0) = \begin{cases}1\\0\end{cases} \qquad & \begin{matrix}\text{für } x\in[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}]\\ \text{für } x\in[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{8})\cup(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}]\end{matrix}\\
u(-\pi/4,t) = 0 \qquad & \text{für } t\in[0,T]\\
u'(\pi/4,t) = 0 \qquad & \text{für } t\in[0,T].
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Temperatur $u(x,t)$.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ und verwenden Sie die Ergebnisse der Aufgabe G3. Schreiben Sie die Lösung als eine Summe und benutzen Sie die Formel für die verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten.

(b) Geben Sie ein Maß für die Abkühlgeschwindigkeit der Kufen an.
Hinweis: Dies ist die Lösung der Gleichung für die Funktion $T(t)$ mit dem kleinsten Eigenwert.

Nach dem Hinweis machen wir den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ *und bekommen* $X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t)$. *Daraus haben wir*

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} =: -\lambda.$$

Diese Identität liefert zwei Gleichungen.
1. $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ *mit Bedingungen* $X(-\frac{\pi}{4}) = 0$ *und* $X'(\frac{\pi}{4}) = 0$, *die aus den Randwertbedingungen folgen. Dieses Eigenwertproblem haben wir in der Aufgabe G3 untersucht. Deshalb haben wir die nichttrivialen Lösungen* ($l = \frac{\pi}{4}$)

$$X_k(x) = \sin\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right),\ k = 0,1,2,\dots\ .$$

2. $\dot{T}(t) + \lambda T(t) = 0$, *beziehungsweise nach 1.* $\dot{T}_k(t) + \lambda_k T_k(t) = 0$, $k\in\mathbb{N}_0$. *Für jedes* k *ist es eine einfache Differentialgleichung erster Ordnung, die man durch Trennung der Variablen löst. Das ergibt*

$$T_k(t) = c_k e^{-\lambda_k t} = c_k e^{-(2k+1)^2 t},\ c_k\in\mathbb{R},\ k = 0,1,2,\dots\ .$$

Insgesamt haben wir die Lösungen $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$ *für* $k\in\mathbb{N}_0$.
Es bleibt nur die Erfüllung der Anfangsbedingung übrig. Sei nun

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{-(2k+1)^2 t}.$$

Es soll gelten $u(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\sin\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \begin{cases}1 & \text{für } x\in[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}]\\ 0 & \text{für } x\in[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{8})\cup(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4}]\end{cases}$ *und deshalb sind die Konstanten* c_k *die verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten der Anfangsfunktion. Das heißt,*

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 1\cdot\sin\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}\,x = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k+1)}\left[-\cos\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\\
&= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2k+1)}\left[\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left((2k+1)\frac{3\pi}{8}\right)\right] = \frac{8}{(2k+1)\pi}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{8}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir am Ende die Formel $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ *und die Tatsache, dass die Sinus-Funktion ungerade ist, benutzt haben. Also die Lösung ist*

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{8}\right)\sin\left((2k+1)\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{-(2k+1)^2 t}.$$

(b) *Der kleinste Eigenwert ist* $\lambda = \lambda_0 = 1$ *und die gesuchte Abkühlgeschwindigkeit ist* e^{-t}.