1. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 (Ein Kegelstück)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der offene Kegel, der den Einheitskreis als Grundfläche und die Höhe 1 hat. Sei außerdem Z der abgeschlossene Zylinder, der den Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$ als Grundfläche hat und unendlich lang ist.

(1) Skizzieren Sie den Menge $K \setminus Z$

(2) Bestimmen Sie eine Pametrisierung von $K \setminus Z$ in Zylinderkoordinaten.

(3) Berechnen Sie das Volumen von $K \setminus Z$ mit Hilfe der in (2) angegebenen Parametrisierung.

(4) Finden Sie eine Parameterdarstellung der äußeren Randfläche von $K \setminus Z$ (also des Stücks der Mantelfläche des Kegels, der auf dem Rand von $K \setminus Z$ liegt).

(5) Berechnen Sie den äußeren Normalenvektor in jedem Punkt des Flächenstücks aus (4). Zeichnen Sie ihn in dem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt des in (4) beschriebenen Flächenstücks.

(2) In Zylinderkoordinaten hat man $K \setminus Z = \{(r, \phi, z) \mid \frac{1}{2} < r < 1,\ 0 < z < 1 - r,\ \phi \in [0, 2\pi)\}$.
(3)

$$\int_{K\setminus Z} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{1-r} \int_0^{2\pi} r\, d\phi\, dz\, dr = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\pi(1-r)r\, dr = 2\pi(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}r^3)|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{6}\pi.$$

(4) Sei $G = B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(0)$ *der Kreisring um 0 mit innerem Radius* $\frac{1}{2}$ *und äußerem Radius 1. Dann ist* $F(x, y) = (x, y, 1 - \sqrt{x^2 + y^2})$ *nach Beispiel 2 auf Seite 37.2 eine Parametrisierung.*
(5)

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad F_y(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\ F_x(x,y) \times F_y(x,y) &= \begin{pmatrix} x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|F_x(x,y) \times F_y(x,y)\| = \sqrt{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Also ist der Normalenvektor $N(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \end{pmatrix}$. *Insbesondere hat man*

$$N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(6) Nach (37.7) hat die oben beschriebene Fläche den Flächeninhalt

$$\int_G \sqrt{2}\, dx = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{4}\pi.$$

G 2 (Ein Oberflächenintegral)

Sei das Flächenstück $\mathfrak{F}$ gegeben durch die Parametrisierung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(u,v) = (u - v, u + v, 4uv), \qquad u^2 + v^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$.

Hinweis: Für die Berechnung ist es sinnvoll, (u, v) in Polarkoordinaten darzustellen.

Für die Berechnung benötigen wir die partiellen Ableitungen

$$F_u(u,v) = (1,1,4v)^T$$
$$F_v(u,v) = (-1,1,4u)^T$$

Man erkennt sofort, dass die Funktionalmatrix $\partial F/\partial U$ *den Rang 2 hat. Außerdem gilt* $D(F) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1/2\}$, *d.h.* $u \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $v \in [-\sqrt{1/2-u^2}, \sqrt{1/2-u^2}]$. $D(F)$ *ist also ein abgeschlossenes Intervall und daher messbar.* $D(F)$ *ist offensichtlich beschränkt, also kompakt. Es folgt*

$$\begin{aligned} A &= \int_{\bar{D}} ||F_u(u,v) \times F_v(u,v)|| d(u,v) \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{(4u-4v)^2 + (-4u-4v)^2 + 4}\; d(u,v) \\ &= \int_{\bar{D}} 2\sqrt{8(u^2+v^2)+1}\; d(u,v) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Polarkoordinaten für u *und* v, *d.h. der Transformation* $h(u,v) = (r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi)^T$ *folgt nun mit* $det(J_h(u,v)) = r$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} 2\sqrt{8r^2+1} \cdot r\, dr d\phi \\ &= 1/8(2/3\sqrt{125} - 2/3) \cdot \int_0^{2\pi} d\phi = \pi/6(\sqrt{125}-1). \end{aligned}$$

Hausübungen

H 1 (Eine Kugelkappe)
Durch die Menge

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\, z \geq \frac{1}{2} \right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K.
Hinweis: Transformieren Sie (x,y,z) in Zylinderkoordinaten.

Die Transformation in Zylinderkoordinaten liefert:

$$h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)^T.$$

Es gilt $\det(J_h(r,\varphi,z)) = r$. *Somit ergibt sich für das Volumen von* K

$$\begin{aligned} \int_K 1\, d(x,y,z) &= \int_{h^{-1}(K)} r\, d(r,\varphi,z) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\, dr\, dz\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}(1-z^2)\, dz\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z^3\right]_{z=1/2}^{z=1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{5}{48}\, d\varphi = \frac{5}{24}\pi. \end{aligned}$$

H 2 (Ein Oberflächenintegral)
Berechnen Sie das Flächenintegral von $H \cdot \vec{n}$ über der Oberfläche S der Kugel K um 0 mit dem Radius R, wobei

$$H = \begin{pmatrix} H_1(x,y,z) \\ H_2(x,y,z) \\ H_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{n}$ der Normalenvektor auf S ist, der nach außen zeigt.

Eine Parametrisierung der Kugel S lautet

$$F(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cdot\cos\phi\cdot\cos\theta \\ R\cdot\sin\phi\cdot\cos\theta \\ R\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

mit $D(F) = \{(\phi,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\phi\le 2\pi,\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2\}$. *Wegen*

$$F_\phi(\phi,\theta)\times F_\theta(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R^2\cdot\cos\phi\cdot\cos^2\theta \\ R^2\cdot\sin\phi\cdot\cos^2\theta \\ R^2\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta \end{pmatrix}$$

gilt

$$||F_\phi(\phi,\theta)\times F_\theta(\phi,\theta)|| = R^2\cdot\cos\theta \text{ und } \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cdot\cos\theta \\ \sin\phi\cdot\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Daher folgt für das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{F}} H\cdot\vec{n}d\sigma &= \int_{\mathfrak{F}} R\ d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\cdot||F_\phi(\phi,\theta)\times F_\theta(\phi,\theta)||d\theta d\phi \\ &= R^3\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta d\phi \\ &= 4\pi R^3.\end{aligned}$$

H 3 (Ein Oberflächenintegral)
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^3/3-u \\ u^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad (u,v)\in D$$

mit $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\le u\le v,\ 0\le v\le 1\}$ gegeben ist.

Wir haben

$$\phi_u(u,v) = \begin{pmatrix} u^2-1 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix},\ \phi_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3v^2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$||\phi_u(u,v)\times\phi_v(u,v)|| = 3v^2(u^2+1)$$

und

$$\begin{aligned}\int_S d\sigma &= \int_D 3v^2(u^2+1)d(u,v) \\ &= \int_0^1\int_0^v 3v^2(u^2+1)\ dudv \\ &= 11/12.\end{aligned}$$