Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17. Dezember 2007

9. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Ein Randwertproblem)
Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2 \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).
(ii) Ermitteln Sie eine spezielle Lösung von der Differentialgleichung in (1).
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz vom Typ der Störfunktion.
(iii) Berechnen Sie die Matrix R der Randwertbedingungen.
(iv) Geben Sie die Gesamtlösung von (1) an.

G 2 (Ein modifizierter Potenzreihenansatz)
Für $\lambda \notin \mathbb{N}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{\lambda}{x} y' + y = 0. \tag{2}$$

(a) Starten Sie mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k}$, wobei $\alpha = 1 - \lambda$, und finden Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_k.
(b) Wählen Sie speziell $\lambda = 0$, und finden Sie eine explizite Lösung von (2), die nicht verschwindet. Verwenden Sie hierzu Ihre in (a) aufgestellte Rekursionsvorschrift.

Hausübungen

H 1 (Ansatz vom Typ der Störfunktion bei Systemen) (2 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(x) = Au(x) + r(x),$$

wobei A eine konstante 3×3-Matrix ist. Die Störfunktion r habe die Form $r(x) = e^{\mu x} v$. Dabei sei v ein konstanter Vektor und die komplexe Zahl μ kein Eigenwert von A.

Geben Sie eine allgemeine Formel für eine spezielle Lösung des Problems an.
Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz der Form $u(x) = e^{\lambda x} \cdot c$.

H 2 (Ein Randwertproblem) (4 Punkte)
Für welche Zahlen $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem

$$4y'' + y = \gamma \sin(x/2)\ , \qquad y(0) = 0, y(2\pi) = 1$$

reelle Lösungen? Welche?
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz vom Typ der Störfunktion, um eine spezielle Lösung zu ermitteln.

H 3 (Potenzreihenansatz) (4+2 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = 0.$$

1. Führen Sie für diese Differentialgleichung einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch.
2. Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die a_n.
3. Berechnen Sie $a_0, \dots, a_6$ (Nehmen Sie dabei an, dass $a_1 > 0$ gilt).
4. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems durch Trennung der Veränderlichen.
5. (Zusatzaufgabe) Finden Sie eine geschlossene Form für a_n, und beweisen Sie diese per Induktion mit Hilfe der Rekursionsformel aus 2.