Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Dezember 2007

8. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Lineares homogenes Differentialgleichungssystem)
Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem sowie die allgemeine Lösung von

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y(x).$$

Geben Sie außerdem die Lösung an, die der Anfangsbedingung $y(0) = (0,1,1)^T$ genügt.

G 2 (Lineares inhomogenes System mit nichtkonstanter Matrix)
Sei das folgende lineare inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/x^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/x^2 \\ -1/x \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Überprüfen Sie, dass die Matrix $W(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = \begin{pmatrix} -2x & 1/x^2 \\ x^2 & 1/x \end{pmatrix}$ eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems ist.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Systems mit dem Anfangswert $\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

G 3 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 y + 1, \; y(0) = 0,$$

mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für die Lösung y.

(a) Bestimmen Sie die ersten 11 Glieder der Potenzreihe für y.

(b) Geben Sie eine allgemeine Formel für die Koeffizienten a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, an.

Hausübungen

H 1 (Konstante Koeffizienten) (2 Punkte)
Geben Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

an. Berechnen Sie die Lösung, die die Anfangsbedingung $(x(0), y(0), z(0))^T = (2, 0, -3)^T$ erfüllt.

H 2 (Variation der Konstanten) (3 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 + x^2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + y_3 + x^2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 + x^2 \, . \end{aligned}$$

Hinweis: Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix sind $v_1 = (2,1,1)^T$, $v_2 = (-1,1,1)^T$ und $v_3 = (0,-1,1)^T$. Benutzen Sie den Ansatz $y(x) = W(x)c(x)$, um ein Gleichungssystem für c' zu bekommen.

H 3 **(Potenzreihenansatz)** (5 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung $y(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Glieder bis zur 7. Ordnung einschließlich für die Lösung des Problems $y' = (x+1)y+1$, $y(-1) = 0$. Geben Sie außerdem eine allgemeine Formel für die Koeffizienten des Potenzreihenansatzes für y an.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_5$ der Potenzreihe für die Lösung von

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1,\ y(0) = 1, \quad \text{mit } -1 < x < 1.$$

Leiten Sie daraus eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.