Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. November 2007

6. Übung zu Mathematik III für ET

Minitest

T1 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L(y) := a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_0(x)y(x) = b(x)$$

mit stetigen a_i und $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann gilt:

( ) Die Lösungen $y_1, y_2, ..., y_n$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für ein $x \in (a,b)$ gilt.
( ) Die Lösungen $y_1, y_2, ..., y_n$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.
( ) Die Lösungen $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn $\det W(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.

T2 Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F(x) = x$. Berechnen Sie $\operatorname{div} F$.

T3 Das Vektorfeld F und die skalarwertige Funktion φ seien zweimal stetig differenzierbar in $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

( ) $\operatorname{div} \nabla(\varphi) = \Delta\varphi$,
( ) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \operatorname{rot} F$,
( ) $\operatorname{rot} (\varphi F) = F \cdot \operatorname{grad} \varphi$.

Gruppenübungen

G 1 Lösung durch die Umkehrfunktion

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{x^2 + y},\ y(1) = 1.$$

Hinweis: Schreiben Sie das Problem zu einem Anfangswertproblem in $x(y)$ um.

G 2 Linear unabhängige Funktionen

Betrachten Sie die Funktionen $f_1 : I \to \mathbb{R}, f_1(x) = x$ und $f_2 : I \to \mathbb{R}, f_2(x) = |x|$

(a) auf dem Intervall $I = [0,1]$ und
(b) auf dem Intervall $I = [-1,1]$.

Sind f_1, f_2 linear unabhängig?

G 3 Fundamentalsystem

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{y}{x} = 0\ .$$

(a) Welche der folgenden Funktionspaare bilden ein Fundamentalsystem dieser Gleichung?
  (i) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 3x + 6.$
  (ii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = x - 3.$
  (ii) $y_1(x) = e^x(x-2), \quad y_2(x) = 4 + 2x - 2e^x + xe^x.$
(b) Bestimmen Sie nun eine Lösung der obigen Gleichung, die den Anfangsbedingungen $y(2) = 8$, $y'(2) = 2 + e^2$ genügt.

Hausübungen

H 1 Konstante Koeffizienten

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 5.$$

H 2 Lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' + y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = e^x$.

(b) Geben Sie eine Lösung an, die die Anfangswerte $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ annimmt.

H 3 Wronski-Determinante

Geben Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'''(x) = \sin x$$

an. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems mit Hilfe der Variation der Konstanten.