Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. November 2007

5. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Lipschitz–Stetigkeit)
Prüfen Sie, ob die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &:= x^2y^2 , \\ f_2(x,y) &:= x^4 \cdot \sqrt{|y|} , \\ f_3(x,y) &:= x + |y| \end{aligned}$$

Lipschitz–stetig sind bezüglich y in den Bereichen

$$R = \{(x,y) \;:\; -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

und

$$S = \{(x,y) \;:\; -1 \le x \le 1, y \in \mathbb{R}\} .$$

G 2 (Methode der sukzessiven Approximation)
Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(0) = 1$.

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung.

(b) Berechnen Sie 3 Näherungslösungen (sukzessive Approximation) mit $y_0 = y(0) = 1$. Vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung aus (a).

G 3 (Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x + 2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

Hausübungen

H 1 (Satz von Picard–Lindelöf) (3 Punkte)
Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2x - y^3 , \qquad y(0) = 0 ,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall $J = [-1/3, 1/3]$ existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion $u_0(x) = 0$ und bestimme u_2.
Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2x - y^3$ auf dem Rechteck $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|,|y| \le 1\}$

H 2 (Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung) (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x \cdot y'' - y' + \frac{2}{x} = 0.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

H 3 (Reduktion der Ordnung) (3 Punkte)
Es soll die Differentialgleichung $x^2 y'' - xy' + y = 0$ auf $I = (0, \infty)$ gelöst werden.

1. Raten Sie eine Lösung y_1 der Differentialgleichung.
2. Bestimmen Sie durch Reduktion der Ordnung eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung.