Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

12. November 2007

4. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 Noch ein Integralsatz I

Zeigen Sie für den Normalbereich $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und die Funktionen $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$ und $g(x,y) = e^x \sin y$, die Beziehung

$$-\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, d(x,y) + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial N} \, d\sigma = 0,$$

indem Sie beide Integrale ausrechnen. Wie folgt diese Aussage aus der 1. Green'schen Integralformel?

G 2 Anfangswertprobleme

1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) \quad = \quad (y + x + 1)^2, \; y(0) = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Substitution.

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y \cos(x) + x^2 e^{\sin x}, \; y(0) = 5.$$

G 3 Bernoulli'sche Gleichung

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y + x^2 y^4, \; y(0) = 1.$$

Hausübungen

H 1 Noch ein Integralsatz II

Es seien Ω ein Normalbereich in $\mathbb{R}^3$ und $F, G : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder. Beweisen Sie den Integralsatz

$$\int_\Omega G \cdot \mathrm{rot} F \, d(x,y,z) = \int_\Omega F \cdot \mathrm{rot} G \, d(x,y,z) + \int_{\partial\Omega} (F \times G) \cdot N \, d\sigma.$$

H 2 Riccati'sche Gleichung

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}, \; y(1) = 0.$$

Hinweis: Raten Sie zuerst eine spezielle Lösung, die der Anfangsbedingung nicht genügt.

H 3 Integrierender Faktor

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung

$$(xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (1 - xy^2)\mathrm{d}y = 0$$

und bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.
Hinweis: Der integrierende Faktor μ sollte als Funktion nur von y, $\mu = \mu(y)$, gewählt werden.