Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. November 2007

3. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Noch ein Integralsatz)
Es seien $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei außerdem $G \subset \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich. Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die Formel

$$\iiint_G (\operatorname{div} u)(x)\phi(x)\,dx = \iint_{\partial G} \phi(x)u(x)\cdot N\,d\sigma - \iiint_G u(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx.$$

G 2 (Der Integralsatz von Stokes)
Sei $H(x,y,z) = (-y^3, x^3, -z^3)$ ein Vektorfeld. Sei $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Schnittkurve des Zylinders $x^2+y^2 = 1$ mit der Ebene $x+y+z = 1$. Der Weg Y beschreibe den Rand $\partial\mathcal{S}$ der Fläche $\mathcal{S}$. Bestimmen Sie

$$\int_{\partial S} H \cdot dY$$

mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes.

G 3 (Trennung der Veränderlichen)
Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0.$$

Lösen Sie dann das Anfangswertproblem $y' + \frac{(1+x)}{x}y = 0$, $y(1) = 1$ und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Hausübungen

H 1 (Potential, Rotation) (3 Punkte)

(i) Sei $D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x_1,x_2) = \frac{1}{||\vec{x}||^2}\cdot(-x_2,x_1)^T, \quad \vec{x} = (x_1,x_2)^T,\ D(f) = D$$

ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass für f gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

(ii) Besitzt f ein Potential? Überprüfen Sie dazu, ob Wegintegrale über geschlossene Kurven gleich 0 sind.

H 2 (Der Integralsatz von Stokes) (4 Punkte)
Sei $\Phi :\ [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(u,v) = (\cos u \cdot \cos v, \sin u \cdot \cos v, \sin v)^T$$

und sei $\mathcal{F}$ die durch Φ gegebene Fläche. Der Weg $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ beschreibe den Rand $\partial\mathcal{F}$ der Fläche $\mathcal{F}$. Weiterhin sei die Funktion

$$H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ gegeben durch } H(x,y,z) = (y, x^2, x^2+y^2).$$

(i) Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{F}$.

(ii) Berechnen Sie

$$\int_{\partial\mathcal{F}} H \cdot dY$$

unter Verwendung des Integralsatzes von Stokes.

(iii) Sei nun $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \in [0,2\pi],\, v \in [0,\frac{\pi}{2}]\}$ und $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Weg, der den Rand ∂D von D beschreibt. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\Phi(X)} H \cdot dY.$$

H 3 (Trennung der Veränderlichen) (3 Punkte)
Finden Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems, und geben Sie den maximalen Existenzbereich der Lösung an.

$$y' = 1 - y^2,\; y(1) = 0.$$

Hinweis: Bei der Integration empfiehlt es sich, auf Partialbruchzerlegung zurückzugreifen.

H 4 (Zusatzaufgabe: Energierhaltung bei stationären Strömungen) (4 Punkte)
Eine zeitlich konstante Strömung einer Flüssigkeit mit konstanter Viskosität ν in einem Stömungsgebiet G kann mit den stationären Navier-Stokes-Gleichungen,

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f && \text{auf } G, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{auf } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G, \end{aligned} \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei ist $u : G \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung, $p : G \to \mathbb{R}$ der Druck und $f : G \to \mathbb{R}^3$ eine gegebene Kraftdichte. Sei genauer G ein C^1-Normalbereich und f ein stetiges Vektorfeld. Seien außerdem u zweimal und p einmal stetig differenzierbar auf $\overline{G}$, so dass (1) erfüllt ist. Dabei sind alle Ableitungen komponentenweise zu verstehen. Das heißt z.B.

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \\ \nabla u_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

(1) $-\iiint_G \Delta u \cdot u \, dx = \iiint_G |\nabla u|^2 \, dx = \iiint_G \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\partial_i u_k)^2 \, dx$,

(2) $\iiint_G \nabla p \cdot u \, dx = 0$,

(3) $\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx = -\iiint u \cdot \nabla u \cdot u \, dx = 0$.

(4) Folgern Sie die Gleichung

$$\nu \iiint\limits_G |\nabla u|^2 dx = \iiint\limits_G f \cdot u \, dx.$$

Das heißt, die Energie, die durch die Reibung der Flüssigkeitsteilchen aneinander vernichtet wird, ist gleich der durch die äußere Kraft f aufgebrachten Arbeit.