Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29. Oktober 2007

2. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Divergenz)

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x, y) = (y, \exp x)^T$. Berechnen Sie die Divergenz von f.
2. Die Abbildung $g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei auf dem Gebiet $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ gegeben durch $g(x, y, z) = (x, \cos z, z^3)^T$. Berechnen Sie die Divergenz von g.
3. Es sei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x, y, z) = xy$. Berechnen Sie $\operatorname{div}(\varphi g)$.

G 2 (Green'scher Integralsatz)

Sei $G := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ und $f(x, y) = (-\exp y, xy + 1)^T$.

1. Berechnen Sie $\int_{\partial G} f \cdot dX$ mit Hilfe des Green'schen Integralsatzes.
2. Berechnen Sie nun das Integral aus dem ersten Aufgabenteil als Wegintegral und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Bestimmen Sie dazu eine geeignete Parametrisierung von ∂G.

G 3 (Gauß'scher Integralsatz)

Berechnen Sie $\int_{\partial K} F \cdot N d\sigma$ für den Kreiszylinder $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H\}, R, H > 0$, und das Vektorfeld

$$F : K \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (xz, yz, 3).$$

Hausübungen

H 1 (partielle Integration)

Es sei $B_1(0)$ die Kugel um 0 mit Radius 1. Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{B_1(0)} -(x+y+z)\left(\frac{x}{\sqrt[2]{1-x^2-y^2-z^2}}\right) d(x,y,z) = \int_{B_1(0)} (x+y+z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[2]{(1-x^2-y^2-z^2)}\right) d(x,y,z).$$

Hinweis: Verwenden Sie $\int w^2 \sqrt[2]{1-w^2}\, dw = -\frac{w}{4}(\sqrt[2]{1-w^2})^3 + \frac{1}{8}(w\sqrt[2]{1-w^2} + \arcsin w)$.

H 2 (Green'scher Integralsatz)

Es sei $G := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$ und $f : G \to \mathbb{R}^2, (x, y)^T \mapsto (x + y^2, x^2 - 2xy)^T$.

1. Berechnen sie $\int_{\partial G} f \cdot dX$ mit Hilfe des Green'schen Integralsatzes.
2. Bestimmen Sie nun das Integral aus dem ersten Aufgabenteil als Wegintegral und vergleichen Sie.

H 3 (Gauß'scher Integralsatz)

Es sei $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, |z| \leq b\}, R, h > 0$, und das Vektorfeld $V : G \to \mathbb{R}^3$ sei durch $V(x, y, z) = e^z(y, x + y, 0)^T$ gegeben. Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für V und G, indem Sie das Oberflächenintegral und das Volumenintegral berechnen.