Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28. Januar 2008

13. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 **(Konvergenzbereiche von Laurentreihen)**
Zerlegen Sie die folgenden Laurentreihen in Haupt-und Regulärteil. Bestimmen und skizzieren Sie die Konvergenzbereiche von Haupt- und Regulärteil sowie den der Laurentreihe als Ganzes.

(a) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} z^j$

(b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} K^{-|j|} z^j$ mit einem $K > 0$

G 2 **(Klassifizieren der isolierten Singularitäten)**
Bestimmen und klassifizieren Sie die Singularitäten der folgenden holomorphen Funktionen (definiert auf dem jeweils naheliegenden Definitionsbereich):

(a) $g(z) = \frac{1+z^2+z^4}{z^5}$

(b) $f(z) = \frac{\cos(z^2)-1}{z^4}$

(c) $h(z) = \sin \frac{1}{z}$.

G 3 **(Laurentreihenentwicklung)**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{1, 3\} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}.$$

Entwickeln Sie die Funktion f in den drei Ringgebieten

$$R_1 := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}, \qquad R_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}, \qquad R_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$$

in eine Laurentreihe.
Hinweis: Partialbruchzerlegung, geometrische Reihe.

Hausübungen

H 1 **(Residuum)**
Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in den isolierten Singularitäten

$$f_1(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}\,, \quad f_2(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}\,.$$

H 2 **(Residuensätze)**
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(i) \int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz \qquad (ii) \int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{5 + 4\cos x} dx \qquad (iii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$(iv) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx \qquad (v) \int_{|z|=1} \frac{1}{|z|} dz$$

Hinweise: zu (ii): Schreiben Sie das Integral als komplexes Wegintegral einer geeigneten Funktion längs des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{it}$; zu (iv): Symmetrie!