Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21. Januar 2008

12. Übung zu Mathematik III für ET

Die korrigierten Hausübungen dieses Übungsblattes können nicht mehr in den Übungen zurückgegeben werden. Sie können sie in den üblichen Sprechstunden der Tutoren abholen.

Gruppenübungen

G 1 (Cauchysche Integralformel)
Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} \, \mathrm{d}\, z.$$

G 2 (Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel)
Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes oder der Cauchyschen Integralformel

$$\int_{K_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} \, \mathrm{d}\, z, \; i = 1, 2, 3,$$

mit

(i) $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : \, z(t) = 2 + e^{it}, \, t \in [0, 2\pi]\}$,
(ii) $K_2 = \{z \in \mathbb{C} : \, z(t) = 2 + 3e^{it}, \, t \in [0, 2\pi]\}$,
(iii) $K_3 = \{z \in \mathbb{C} : \, z(t) = 2 + 5e^{it}, \, t \in [0, 2\pi]\}$.

G 3 (Maximum einer Funktion)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \; f(z) = |-4 + 6z - z^2|$. Bestimmen Sie $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z_0) = \max_{z \in G} f(z)$$

mit $G = \{z \in \mathbb{C} : \, |z-3| \leq 1\}$.
Hinweis: Benutzen Sie das Maximumprinzip.

Hausübungen

H 1 (Cauchysche Integralformel) (3 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$J = \int_C \frac{ze^z}{z^2 + 4} \, \mathrm{d}\, z,$$

wobei C eine positiv orientierte Kreislinie mit Mittelpunkt $2i$ und Radius 2 ist.

H 2 (Cauchysche Integralformel) (3 Punkte)
Berechnen Sie das folgende Integral mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z/z}{(z-1)^3} \, \mathrm{d}\, z.$$

H 3 (Cauchysche Integralformel) (4 Punkte)
Gegeben sei die Kurve K durch die Parametrisierung

$$W : \varphi(t) = 2 \sin t - 2i \sin 2t, \; t \in [0, 2\pi].$$

(i) Skizzieren Sie $\varphi(t)$ in der komplexen Ebene und deuten Sie durch mehrere Pfeilen die Orientierung der Kurve K an.
(ii) Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel das Kurvenintegral

$$\int_K \frac{1}{z^2 - 1} \, \mathrm{d}\, z.$$

Hinweis: Beachten Sie die Parametrisierung der Kurve K und benutzen Sie die Eigenschaften des Wegintegrals.