Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Januar 2008

11. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 Komplexe Differenzierbarkeit

Geben Sie den Bereich D an, auf dem die folgenden Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind, und berechnen Sie die komplexe Ableitung.

1. $f_1(z) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}(z-2i)^k$,
2. $f_2(z) = \frac{z+1}{z^2+(i-1)z-i}$.

G 2 Cauchy-Riemann

Untersuchen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ob die folgenden Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind. Wenn ja, geben Sie einen möglichst großen Bereich D und die erste Ableitung an.

1. $f_1(z) = \sin(iz)$,
2. $f_2(z) = |z|$,
3. $f_3(z) = z^3 - iz$.

G 3 Komplexe Wegintegrale

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{z^2}$.

1. Berechnen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion das Wegintegral
$$\int_{W_i} f(z)\,dz, \qquad i = 1,2,3$$
entlang der folgenden Wege
   (a) W_1 ist gegeben durch die Parametrisierung $z(t) = -i + e^{it}, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}]$,
   (b) W_2 verläuft entlang der Geraden $y = -it, t \in [0,2]$.
2. Berechnen Sie für den Weg W_2 das Wegintegral unter Verwendung geeigneter reeller Integrale.

Hausübungen

H 1 Komplexe Differenzierbarkeit (4 Punkte)

Untersuchen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, ob die folgenden drei Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

1. $f_1(z) = \frac{1}{z^2}, \quad D = \mathbb{C}\backslash\{0\}$,
2. $f_2(z) = \cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad D = \mathbb{C}$,
3. $f_3(z) = i(\overline{z} - z) - i(z + \overline{z}), \quad D = \mathbb{C}$.

H 2 Ergänzung zu einer holomorphen Funktion (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion
$$u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y \quad \text{für } x,y \in \mathbb{R}.$$
Bestimmen Sie alle Funktionen $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, wobei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Geben Sie f als Funktion von z an.

H 3 Komplexe Wegintegrale (4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = 3iz^2 - 4z + 5i$ eine komplexwertige Funktion und W der Weg auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten in positiver Richtung.

1. Berechnen Sie das Wegintegral mit Hilfe einer Stammfunktion.
2. Berechnen Sie das Wegintegral mit Hilfe von reellen Integralen.
3. Wir betrachten nun den geschlossenen Weg Y, der den Viertel-Einheitskreis im ersten Quadranten einschließt und aus dem Weg W und Geradenstücken auf der $x-$ und $y-$Achse besteht.

(a) Schreiben Sie das Wegintegral $\int_Y g(z)dz$ erst wieder als Summe von zwei reellen Integralen und dann mit Hilfe der Integralsätze von Green und Gauss in zwei reelle Flächenintegrale um. Welchen Wert nimmt das Integral an?

(b) Berechnen Sie das Wegintegral mit einer der Methoden aus 1. oder 2.