Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Januar 2008

10. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Komplexe Zahlen)

(a) Geben Sie den Realteil, den Imaginärteil, den Betrag, das Argument (den Winkel φ) und die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl $z = 1 + i$ an.

(b) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3, \qquad z_2 = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n},\ n \in \mathbb{N}.$$

(c) Beschreiben Sie geometrisch und skizzieren Sie in der komplexen Ebene die folgenden Mengen.
$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z\}$
$C = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq |z+1|\}$

G 2 (Folgen, Reihen, Potenzreihen)

(a) Überprüfen Sie die Folge $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

$$z_n = \frac{3n^5+1}{n^5+2n} + i\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5+3i)n}{(1-i)^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{i^n}{2}\right).$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe in $\mathbb{C}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} z^n$$

G 3 (Eigenwertproblem)
Geben Sie in Abhängigkeit von λ alle Eigenfunktionen des Eigenwertproblems

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,\ y(-l) = 0,\ y'(l) = 0,$$

mit festem $l > 0$ an.
Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$. Beachten Sie, dass die triviale Lösung keine Eigenfunktion ist.

Hausübungen

H 1 (Komplexe Zahlen) (4 Punkte)

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die Formel $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

(b) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl

$$z = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ungerade Zahl ist.
Hinweis: $\bar{z} = \frac{1}{(1-i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n}$.

(c) Beschreiben Sie geometrisch und skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 4\}$ in der komplexen Ebene.
Hinweis: Betrachten Sie $z = x + iy$ und formen Sie die Gleichung für z in eine Gleichung für x und y um.

H 2 **(Folgen, Reihen, Potenzreihen)** (5 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die Folgen $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ auf Konvergenz. Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

$$(i)\ z_n = \frac{n + in^2}{n^2 - in}, \qquad (ii)\ z_n = \frac{n}{n+1} e^{i\pi n}.$$

(b) Untersuchen Sie die Reihe in (i) auf Konvergenz. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe in (ii)? Berechnen Sie ihre Summe.

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2+i)^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n.$$

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n^2} z^n.$$

Konvergiert die Reihe auf dem Rand des Konvergenzkreises?

H 3 (Zusatzaufgabe) **(Noch eine Weihnachtsaufgabe: Wärmeleitungsgleichung)** (5 Punkte)
Nachdem der Weinachtsmann alle Geschenke verteilt hatte, ist er nun auf seinem Schlitten auf dem Rückweg in den hohen Norden. Dabei durchquert er die verschiedensten Länder, wobei sich die Temperatur der Kufen seines Schlittens ändert. Die Temperaturverteilung soll durch das folgende Anfangs-Randwertproblem für die 1-dimensionale Wärmeleitungsgleichung beschrieben werden ($' := \frac{\partial}{\partial x}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad & \text{auf } \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \times (0,T) \\
u(x,0) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad & \begin{array}{l} \text{für } x \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \\ \text{für } x \in [-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{8}) \cup (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}] \end{array} \\
u(-\pi/4, t) = 0 \quad & \text{für } t \in [0,T] \\
u'(\pi/4, t) = 0 \quad & \text{für } t \in [0,T].
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Temperatur $u(x,t)$.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ und verwenden Sie die Ergebnisse der Aufgabe G3. Schreiben Sie die Lösung als eine Summe und benutzen Sie die Formel für die verallgemeinerten Fourier-Koeffizienten.

(b) Geben Sie ein Maß für die Abkühlgeschwindigkeit der Kufen an.
Hinweis: Dies ist die Lösung der Gleichung für die Funktion $T(t)$ mit dem kleinsten Eigenwert.