Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. R. Farwig
V. Fišerová
K. Götze
K. Schumacher

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

22. Oktober 2007

1. Übung zu Mathematik III für ET

Gruppenübungen

G 1 (Ein Kegelstück)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ der offene Kegel, der den Einheitskreis als Grundfläche und die Höhe 1 hat. Sei außerdem Z der abgeschlossene Zylinder, der den Kreis um 0 mit Radius $\frac{1}{2}$ als Grundfläche hat und unendlich lang ist.

(1) Skizzieren Sie den Menge $K \setminus Z$

(2) Bestimmen Sie eine Pametrisierung von $K \setminus Z$ in Zylinderkoordinaten.

(3) Berechnen Sie das Volumen von $K \setminus Z$ mit Hilfe der in (2) angegebenen Parametrisierung.

(4) Finden Sie eine Parameterdarstellung der äußeren Randfläche von $K \setminus Z$ (also des Stücks der Mantelfläche des Kegels, der auf dem Rand von $K \setminus Z$ liegt).

(5) Berechnen Sie den äußeren Normalenvektor in jedem Punkt des Flächenstücks aus (4). Zeichnen Sie ihn in dem Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(6) Berechnen Sie den Flächeninhalt des in (4) beschriebenen Flächenstücks.

G 2 (Ein Oberflächenintegral)

Sei das Flächenstück $\mathfrak{F}$ gegeben durch die Parametrisierung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(u, v) = (u - v, u + v, 4uv), \qquad u^2 + v^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von $\mathfrak{F}$.

Hinweis: Für die Berechnung ist es sinnvoll, (u, v) in Polarkoordinaten darzustellen.

Hausübungen

H 1 (Eine Kugelkappe)

Durch die Menge

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K.
Hinweis: Transformieren Sie (x, y, z) in Zylinderkoordinaten.

H 2 (Ein Oberflächenintegral)

Berechnen Sie das Flächenintegral von $H \cdot \vec{n}$ über der Oberfläche S der Kugel K um 0 mit dem Radius R, wobei

$$H = \begin{pmatrix} H_1(x, y, z) \\ H_2(x, y, z) \\ H_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{n}$ der Normalenvektor auf S ist, der nach außen zeigt.

H 3 (Ein Oberflächenintegral)

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Fläche, die durch die Parameterdarstellung

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} u^3/3 - u \\ u^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \qquad (u, v) \in D$$

mit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq v, \, 0 \leq v \leq 1\}$ gegeben ist.