Statistik I

für Human- und

Sozialwissenschaftler

Skript zur Vorlesung

Fachbereich Mathematik

Technische Universität Darmstadt

im Wintersemester 2007/08

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Statistik beschäftigt sich mit der Auswertung von _______________ , die unter Einfluss des _______________ bei _________________________ , ______________________________ oder _________________________ entstanden sind.

Sie bedient sich dabei ____ und hat zum Ziel,

(1) große Datenmengen durch Angabe charakteristischer Kenzahlen überschaubarer zu machen (sog. ____), sowie

(2) aus den Daten Rückschlüsse zu ziehen, welche Zufallsgesetze dem Vorgang der Datenerhebung zugrundeliegen (sog. ____).

Die der Datengewinnung dienende _________________________ , ______________________________ oder ____________________ nennt man auch ____ .

Die erhobenen Sachverhalte heißen _________________________ . Die Daten sind das Ergebnis der ____ und heißen ____ , _______________________ oder _________________________ .

Die ______________________________________ lassen sich unterschiedlichen ______________________ zuordnen. Dazu ein Beispiel:

Beispiel 1

In einer Statistik-Vorlesung wurden die anwesenden Studenten befragt nach:

(1.1) Geschlecht

(1.2) Familienstand

(1.3) Interesse an der Vorlesung (gemäß folgenden Einstufungen: sehr interessiert - interessiert - mäßig interessiert - kaum interessiert - nicht interessiert)

(1.4) Beurteilung des Dozenten (gemäß folgenden Einstufungen: sehr gut - gut - befriedigend - mangelhaft - schlecht - sehr schlecht)

(1.5) Alter

(1.6) Anzahl der Fachsemester

(1.7) Weglänge von der Wohnung zur Hochschule

(1.8) Monatliches Einkommen

Die in dieser Befragung erhobenen Merkmale sind gerade

___________________ bis __________________________________ .

Die Merkmalsausprägungen des Merkmals (1.1) sind: ___________________ ,

___________________ ; die Merkmalsausprägungen des Merkmals (1.2) sind:

________________ , ____________________ , ____________________ ,

____________________ ; usw. bis zum Merkmal (1.8): Seine Merkmalsausprägungen sind Geldbeträge in Euro, d.h. positive reelle Zahlen mit bis zu zwei Nachkommastellen. (Beantworten Sie sich selbst die Frage, was die Merkmalsausprägungen der Merkmale (1.3) bis (1.7) sind!)

Wir kommen nun zu den unterschiedlichen ____________________ , denen die Merkmalsausprägungen angehören können:

(1) **Nominalskala**

Die Merkmalsausprägungen einer Nominalskala lassen sich lediglich ________________________ . Sinnvoll können hier nur Gleichheits- oder Ungleichheitsoperationen angewendet werden.

Im letzten Beispiel sind die Merkmale ________________________ und ________________________________ nominal skaliert.

(2) **Ordinalskala**

Die Merkmalsausprägungen einer Ordinalskala lassen sich lediglich ________________________ und ____________________ . Hier lässt sich eine sinnvolle Rangreihenfolge der Merkmalsausprägungen angeben, und die Operationen ”$<$”, ”$>$”, ”$\leq$” und ”$\geq$” können sinnvoll angewendet werden.

Im letzten Beispiel sind die Merkmale

____ und

____ ordinal skaliert.

(3) **Intervallskala**

Die Merkmalsausprägungen einer Intervallskala lassen sich

____________________ und ____________________ und

darüberhinaus läßt sich lediglich die Größe ihrer ________________

voneinander in ganzen Einheiten bestimmen. Man kann sinnvoll beantworten, um wieviele ganze Einheiten größer einzelne Merkmalsausprägungen sind als andere und die Operationen Addition und Subtraktion (im Bereich der ganzen Zahlen) können sinnvoll angewendet werden. Im letzten Beispiel sind

die Merkmale ____________________ und

____

intervallskaliert.

(4) **Verhältnisskala**

Die Merkmalsausprägungen einer Verhältnisskala lassen sich

____________________ , ________________ , die

Größe ihrer Abstände lässt sich bestimmen und für die Skalenwerte sind

________________ zugelassen und nicht nur ganze Zahlen wie bei der Intervallskala. Hier sind neben Addition und Subtraktion auch Multiplikation und Division sinnvolle Operationen. Im letzten Beispiel sind die Merkmale

____

und ____

verhältnisskaliert.

Nominalskala und Ordinalskala bezeichnet man als ______________________________

Skalen, Intervallskala und Verhältnisskala hingegen als ____________________ Skalen.

Wenn wir nun eine Statistische Erhebung durchgeführt haben, egal welche Skalenart vorliegt, ist die erste Aktion, die der Statistiker an den vorliegenden Daten vornimmt, die Auszählung von ______________________________ .

Wir unterscheiden dabei

(1) die ____ eines Merkmals:

Das sind die Anzahl der Messwerte, die jeweils einer Merkmalsausprägung zugeordnet werden können; sowie

(2) die ____ eines Merkmals:

Das sind die absoluten Häufigkeiten jeder Merkmalsausprägung dividiert durch die Gesamtanzahl der Messwerte dieses Merkmals. Damit wir bei den relativen Häufigkeiten Prozentwerte herausbekommen, werden die relativen Häufigkeiten noch mit 100 multipliziert.

Beispiel 2

Wir fragen 10 zufällig vorbeigehende Personen nach ihrer Größe (in cm):

176, 160, 187, 154, 157, 163, 192, 157, 172, 182.

Eine graphische Darstellung dieser Daten, der sog. ____________________ ,

ist das ___________________________________ .

Hierfür werden auf der waagrechten Achse eines Koordinatensystems die Merkmalsausprägungen abgetragen und darüber stehen Stäbe. Die Stabhöhen sind gerade die absoluten oder relativen Häufigkeiten, welche auf der senkrechten Achse abgetragen werden.

Stabdiagramm für die absoluten Häufigkeiten:

Sind die in der ____________________ vorkommenden Zahlen fast alle voneinander verschieden, so bietet sich der Übergang zu klassierten Daten an. Wir teilen die Merkmalsausprägungen in Klassen ein und erstellen nun eine

____ :

Als graphische Darstellung von klassierten Daten verwendet man häufig das

____________________ . Es besteht aus Rechtecken, die über den einzelnen Klassen so errichtet werden, daß die Rechtecksfläche proportional zur jeweiligen Häufigkeit der Klasse ist.

Histogramm für die relativen Häufigkeiten (in Prozent):

Nach Möglichkeit sollten die Klassengrenzen __________________________ gewählt werden. Die Höhen der Histogramm-Rechtecke sind dann proportional zur Häufigkeit der jeweiligen Klasse.

Eine Alternative zum Histogramm ist das

____ . Es besteht aus dem Streckenzug, der die Mitten aller oberen Rechteckseiten des Histogramms verbindet. Die so entstandene Linie nennt man __________________________ .

Mit Hilfe von Histogrammen lassen sich bestimmte Charakteristika der Verteilungen der Häufigkeiten erkennen. ______________________________ Daten haben nur ein Maximum, ______________________________ Daten sind dagegen mehrgipfelig. Die Daten können um einen Wert ___________________________________ oder _________________________ verteilt sein. Bei linksschiefen Verteilungen fällt die linke Seite langsamer ab als die rechte.

Charakteristika von Häufigkeiten:

Schließlich interessieren wir uns noch für die

____ und die

____ Häufigkeiten.

Diese erhält man durch sukzessives Aufsummieren wie folgt:

Dabei muss die unterste Zahl in der Spalte "kumulierte absolute Häufigkeit" stets die Gesamtanzahl der Beobachtungen ergeben und die unterste Zahl in der Spalte "kumulierte relative Häufigkeit" muss stets 100 (bei Prozentwerten) sein.

Für eine kürzere Schreibweise in den Tabellen verwenden wir folgende Abkürzungen:

__________ : absolute Häufigkeit der k-ten Merkmalsausprägung

__________ : relative Häufigkeit der k-ten Merkmalsausprägung

_______________ : absolute kumulierte Häufigkeit der k-ten Merkmalsausprägung

_______________ : relative kumulierte Häufigkeit der k-ten Merkmalsausprägung

Dabei ist k einfach ein _________________________ , der die Merkmalsausprägungen durchnumeriert.

2 Statistische Kennwerte

Wir wollen uns nun der Beschreibenden Statistik zuwenden, d.h. für eine vorliegende Datenmenge charakteristische Kennzahlen, sog. ______________________________ ______________________________ , angeben. Wir betrachten dazu nur Daten aus metrischen Skalen.

Seien also ___________________________________ die hintereinandergeschriebenen Messwerte eines metrisch skalierten Merkmals, d.h. _____ ist der erste Messwert dieses Merkmals, _____ ist der zweite Messwert, usw.

___________________________________ heißt _________________________ .

Dabei ist _____ stets die Gesamtanzahl der vorliegenden Messwerte. Ordnet man die Zahlen dieser Messreihe der Größe nach, so schreiben wir die ____________________ _________________________ mit in Klammern gesetzten Indizes wie folgt:

___________________________________ mit ___________________________________ .

Für eine reelle Zahl x, (kurz $x \in \mathbb{R}$), bezeichne $m(x)$ die Anzahl der Werte in der Messreihe, die kleiner oder gleich der Zahl x sind. Wir definieren die sogenannte

____

________________________ durch:

Es handelt sich dabei um eine Treppenfunktion, deren

________________________ die Werte der Messreihe sind. Die jeweiligen

______________________ sind die relativen Häufigkeiten der Messwerte in der Messreihe.

Beispiel 3

18 Schüler eines Mathematik-Kurses in der Oberstufe eines Gymnasiums werden nach ihrer letzten Klausurnote befragt. Wir erhalten folgende Messreihe:

2, 1, 4, 4, 3, 2, 3, 3, 3, 5, 4, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 3.

Durch eine Strichliste ermitteln wir die Häufigkeiten der einzelnen Noten:

Empirische Verteilungsfunktion:

Für jedes Merkmal bzw. für jede Messreihe eines Merkmals lassen sich nun folgende Statistische Kennwerte angeben:

(1) Der ____________________ eines Merkmals ist der am häufigsten vorkommende Messwert einer Messreihe. In Formeln:

Der ________________ ist nicht unbedingt eindeutig.

An der Strichliste könne wir den Modalwert ablesen: __________ . Hier ist der Modalwert eindeutig. Falls wir jedoch die Schüler mit Note 3 von der Befragung ausschließen, dann wäre der Modalwert nicht mehr eindeutig, da dann die Noten 2 und 4 beide mit derselben größten Häufigkeit vorkommen.

(2) Um den ____________________ eines Merkmals zu bestimmen, müssen wir die geordnete Messreihe betrachten (mit Vielfachheiten). Falls n (=Anzahl der Messwerte) ungerade, so ist der ____________________ der mittlere Messwert; falls n gerade, so ist der ____________________ die Hälfte der Summe aus den mittleren beiden Messwerten. In Formeln:

Um den Median zu bestimmen, bilden wir die geordete Messreihe:

Da n=18 eine gerade Zahl ist, ist der Median die Hälfte der Summe aus den mittleren beiden Messwerten:

(3) Ein ____________________ einer Messreihe zerlegt diese in einen unteren und einen oberen Teilbereich. Der ____________________ bezeichnet dabei stets die relative Häufigkeit im unteren Teilbereich. Der ____________________ ist der kleinste Messwert mit der Eigenschaft, daß verglichen mit ihm mindesten ____________________ der Messwerte nicht größer sind.

(4) Das ____

eines Merkmals ist die Summe aller Messwerte dividiert durch die Anzahl aller Messwerte einer Messreihe. In Formeln:

Ein anderer Name für das ______________________________

ist auch ____________________ .

Für das Arithmetische Mittel addieren wir alle Noten der Messreihe. (Achtung!!! Die Noten und nicht die Häufigkeiten werden addiert!!!) Die so berechnete Summe dividieren wir noch durch n=18 und erhalten das Arithmetische Mittel:

Das heißt: Die in der letzten Klausur erzielte Durchschnittsnote ist ________ .

In bestimmten Situationen sind dem arithmetischen Mittel andere Arten von Durchschnittswerten vorzuziehen.

(5) Das ____

eines Merkmals ist die n-te Wurzel aus dem Produkt aller Messwerte. Es ist nur für nichtnegative Zahlen definiert. In Formeln:

Ein Beispiel ist die durchschnittlichen Inflationsrate: 1. Jahr 15%, 2. Jahr 10%, 3 Jahr 20%.

Fährt man 100 km mit 50 km/h und dann 100 km mit 100 km/h, so legt man 200 km in 3 Stunden zurück, die Durchschnittsgeschwindigkeit ist 66 2/3 km/h. Dies ist das ________________________________ Mittel von 50 und 100.

(6) Das ____ eines Merkmals ist der Kehrwert des arithmetische Mittel der Kehrwerte. Es ist nur für positive Zahlen definiert. In Formeln:

Das _______ ist geeignet für Größen, von denen das Produkt anstelle der Summe interpretierbar ist, z. B. von Verhältnissen oder Wachstumsraten. Das _______ eignet sich für Größen, die durch einen (relativen) Bezug auf eine Einheit definiert sind.

Zwei weitere wichtige Statistische Kennwerte sind die folgenden:

(7) Die ___________________________ eines Merkmals ist die Summe der quadrierten Differenzen der Messwerte zum Arithmetischen Mittel dividiert durch die Anzahl aller Messwerte der Messreihe. In Formeln:

(8) Die ____ eines Merkmals ist die Wurzel aus der Varianz. In Formeln:

____________________ und ____

sind Maße für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert und heißen auch

______________________________ ; wohingegen ______________________ ,

_________________ , _______ , _______ und _______ Auskunft geben über die

Lage der Messwerte auf der Zahlengeraden; deswegen heißen sie auch

__________________________ .

Beispiel 4 *(Fortsetzung von Beispiel 3)*

Zur Berechnung von Varianz und Standardabweichung in Beispiel 3 gehen wir nun schrittweise vor und erweitern obige Häufigkeitstabelle um folgende zusätzliche Spalten:

Nun summieren wir die Einträge der letzten Spalte auf und erhalten : _________ *.*

Dieses Ergebnis entspricht genau der Summe ______________________ *aus der Formel! Warum? Weil wir uns mit Hilfe der absoluten Häufigkeiten in der Formel die Arbeit verkürzt haben:*

Dieses Ergebnis jetzt noch durch 18 dividiert ergibt die Varianz:

Und daraus die Wurzel gezogen ergibt die Standardabweichung:

Das heißt: Der mittlere Abstand der Klausurnoten von der Durchschnittsnote ist _______________ *und der mittlere quadratische Abstand der Klausurnoten von der Durchschnittsnote ist* _______________ .

Eine weitere Möglichkeit, die Varianz zu berechnen, erhalten wir durch Umformen der Varianzformel:

(Beide Formeln zur Berechnung der Varianz haben Vor- und Nachteile; das hängt von den vorgegebenen Daten ab.)

Beispiel 5 *(Fortsetzung von Beispiel 3)*

Die Tabelle zur Berechnung der Varianz mit der alternativen Berechnungsformel sieht nun wie folgt aus:

Summation aller Einträge der letzten Spalte ergibt:

Diese Zahl dividiert durch n=18 ergibt _______________ *. Davon noch* __________ *subtrahiert ergibt die Varianz:*

Und dies ist unser bekanntes Ergebnis aus den vorhergehenden Berechnungen.

(9) Der ____ eines Merkmals ist die Standardabweichung dividiert durch das arithmetische Mittel. In Formeln:

Der ____ wird vor allem beim Vergleich von Daten mit sehr unterschiedlichen Mittelwerten verwendet.

Modalwert, Median, Arithmetisches Mittel, Varianz und Standardabweichung sind alles Statistische Kennwerte, die sich für jedes einzelne Merkmal einer Statistischen Erhebung berechnen lassen. Deswegen heißen sie auch Kennwerte für ______________ ________________________ (oder ____________________________) Messreihen.

Wir werden jetzt noch ____ (oder ___________________) Messreihen kennenlernen.

____ Messreihen bestehen aus den Messwerten ______________ Merkmale einer Statistischen Erhebung, die wir als Paare schreiben wie folgt:

Die zugehörige zweidimensionale Häufigkeitstabelle heißt ________________________ ______________ und eine geeignete graphische Darstellung ist das ________________ ________________________ .

Beispiel 6

(a) 7 Studentinnen und 11 Studenten eines Seminars werden gefragt, ob sie Raucher oder Nichtraucher sind. Dabei ergab sich folgende zweidimensionale Messreihe bestehend aus den Datenpaaren (Erster Eintrag: Geschlecht (m oder w), Zweiter Eintrag: R für Raucher oder N für Nichtraucher):

(m,N), (m,N), (m,R), (w,N), (m,N), (m,R), (w,N), (m,N), (w,R),

(m,N), (w,R), (w,N), (m,N), (m,R), (w,N), (m,N), (w,N), (m,N).

Aus diesen Datenpaaren erstellen wir folgende beiden Kontingenztafeln:

und

Die untere Kontingenztafel erhalten wir aus der oberen, indem wir alle oberen Einträge durch n=18 dividieren und mit 100 multiplizieren (damit wir in der unteren Kontingenztafel Prozentwerte erhalten).

(b) In einer Studie über den Einfluss von Düngung auf die Ernteerträge bei Weizen wurden 7 Felder untersucht. Dabei ergab sich folgende zweidimensionale Messreihe bestehend aus den Datenpaaren (Erster Eintrag: Dünger in kg pro ha, Zweiter Eintrag: Ernte in dz pro ha):

Aus diesen Datenpaaren erstellen wir folgendes Punktediagramm:

An diesem Punktediagramm können wir die positive Tendenz erkennen, dass vermehrte Düngung zu höherem Ernteertrag auf den untersuchten Feldern führt.

3 Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeitstheorie stellt ____________________________________

____________________ zur Verfügung, mit deren Hilfe die einer Statistischen Erhebung zugrundeliegenden ____ beschrieben werden können.

Wir bezeichnen einen Vorgang, der nach einer ganz bestimmten Vorschrift durchgeführt wird, und dessen Ausgang (oder dessen Ergebnis) vom Zufall abhängt, also nicht vorhersagbar ist, als ein ____ .

Die Menge aller Ausgänge (Ergebnisse) eines ____________________________________ heißt ______________________________ .

Diese ______________________________ bezeichnen wir kurz mit ________ und ihre einzelnen ____________________ , die ____ , bezeichnen wir mit ____ .

Eine Teilmenge von ________ heißt ____________________ . Für solche Teilmengen schreiben wir meist Großbuchstaben ____________________ . Einelementige Teilmengen von ________ heißen ____ .

Beispiel 7

(a) *Wir betrachten das Zufallsexperiment: "Werfen eines Würfels"*

Ergebnismenge: ________________________

Elementarereignisse: ______________________________

Beispiele für Ereignisse:

Ereignis A: "Gerade Augenzahl" $\Longrightarrow$ $A=$ ____________

Ereignis B: "Ungerade Augenzahl" $\Longrightarrow$ $B=$ ____________

Ereignis C: "Augenzahl größer als 3" $\Longrightarrow$ $C=$ ____________

Ereignis D: "Augenzahl kleiner als 2" $\Longrightarrow$ $D=$ ____________

Bemerkung: A, B, C und D sind alles Teilmengen von Ω *, werden also mit Mengenklammern geschrieben, auch wenn nur ein einziges Element drin ist!*

(b) *Zufallsexperiment: "Einfacher Münzwurf"*

Ergebnismenge: __________________________ *oder kurz*

____

Elementarereignisse: ______________________________

oder kurz __________________

Beispiele für Ereignisse:

Ereignis A: "Wappen" $\Longrightarrow$ $A=$ ____________

Ereignis B: "Nicht Wappen" $\Longrightarrow$ $B=$ ____________

Ereignis C: "Wappen oder Zahl" $\Longrightarrow$ $C=$ ____________

Ereignis D: "Wappen und Zahl" $\Longrightarrow$ $D=$ ____________

(c) *Zufallsexperiment: "Zweifacher Münzwurf"*

Ergebnismenge: ____

Elementarereignisse:

____

Beispiele für Ereignisse:

Ereignis A: "Mindestens einmal tritt Zahl auf"

$\Longrightarrow$ *A=* ____________________________________

Ereignis B: "Beidesmal Wappen" $\Longrightarrow$ *B=* ________________

Seien A, B Ereignisse, d.h. A, B $\subseteq \Omega$.

(a) A $\cup$ B heißt ____________________ von A und B (A **oder** B treten ein)

(b) A $\cap$ B heißt ____________________ von A und B (A **und** B treten ein)

(c) $\overline{\mathrm{A}} = \Omega \setminus \mathrm{A}$ heißt ____________________________

________________ oder ________________________ von A

(d) Falls A = $\emptyset$, so heißt A ____________________________________

(e) Falls A = Ω, so heißt A ________________________________

(f) Falls A $\cap$ B = $\emptyset$, so heißen A und B ________________________ oder

____________________________________ .

(Dabei wird mit "$\emptyset$" stets die leere Menge "{}" bezeichnet und "\" heißt "ohne".)

Beispiel 8 *(Fortsetzung des letzten Beispiels)*

zu (a): $A \cup B =$ ______________________________

$A \cap B =$ ______________________________

$C \cup D =$ ______________________________

$C \cap D =$ ______________________________

$\overline{A} =$ ______________________________

$\overline{B} =$ ______________________________

$\overline{C} =$ ______________________________

$\overline{D} =$ ______________________________

zu (b): $A \cup B =$ ______________________________

$A \cap B =$ ______________________________

$B \cup C =$ ______________________________

$B \cap C =$ ______________________________

$\overline{A} =$ ______________________________

$\overline{B} =$ ______________________________

$\overline{C} =$ ______________________________

zu (c): $A \cup B =$ __________

$A \cap B =$ __________

$\overline{A} =$ __________

$\overline{B} =$ __________

Im nächsten Schritt ordnen wir jedem uns interessierenden Ereignis A$\subseteq \Omega$ eine Zahl zwischen 0 und 1 zu, die sog. ______________________________ des Eintretens von Ereignis A. Dafür schreiben wir __________ .

Damit diese ______________________________ mathematisch gut handhabbar sind, müssen sie die sog. ______________________________ ____________________ (I) bis (III) erfüllen:

(I) P(A)$\geq$0 für jedes Ereignis A$\subseteq \Omega$, d.h. Wahrscheinlichkeiten sind immer ≥ 0;

(II) P(Ω)=1, d.h. die Wahrscheinlichkeit des Ganzen ist immer 1;

(III) Sind die Ereignisse $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots\ \subseteq \Omega$ paarweise disjunkt, so muss die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung gleich die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten sein; in Formeln:

____

(sog. ______________________________ .)

Aus den Kolmogoroff'schen Axiomen lassen sich nun folgende ____________________ ______________________________ herleiten:

Seien dazu A, B $\subseteq \Omega$. Dann gelten:

(1) _____ $\leq$ P(A) $\leq$ _____ ;

(2) P($\emptyset$)= _____ und P(Ω)= _____ ;

(3) $P(\overline{A})=$ __________________ ;

(4) $P(A \cup B)=$ ____

(sog. ____);

(5) Aus $A \subset B$ folgt ______________________ .

Beispiel 9 *(Fortsetzung der letzten beiden Beispiele)*

zu (a): (Werfen eines Würfels)

$P(A \cup B) = P(\Omega) =$ _____

$P(A \cap B) = P(\emptyset) =$ _____

$P(B \cup C) = P(\{1,3,4,5,6\}) =$ _____

$P(B \cap C) = P(\{5\}) =$ _____

$P(\overline{C}) = P(\{1,2,3\}) =$ ______________

oder mit Rechenregel (3):

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - P(\{4,5,6\}) =$ ________________________________

Die Wahrscheinlichkeiten im letzten Beispiel haben wir durch einfaches Abzählen bestimmt. Das geht immer dann, wenn ein sog. _______________________

_______________________ vorliegt. Ein _______________________

_______________________ ist ein Zufallsexperiment, das nur endlich viele, nämlich n, Ausgänge besitzt, die alle gleichwahrscheinlich sind.

Das heißt:

Jeder Ausgang oder jedes Elementarereignis eines _______________________

____________________________ tritt mit Wahrscheinlichkeit _____ ein.

Beispiel 10 *(Fortsetzung der letzten drei Beispiele)*

zu (a): (Werfen eines Würfels)

Hier ist n= _____ *und es liegt ein Laplace-Experiment vor, d.h. jede Augenzahl tritt mit derselben Wahrscheinlichkeit* _____ *auf.*

zu (b): (Einfacher Münzwurf)

Hier ist n= _____ *und es liegt ebenfalls ein Laplace-Experiment vor, d.h. jede Seite der Münze tritt mit derselben Wahrscheinlichkeit* _____ *auf.*

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $A \subseteq \Omega$ von einem Laplace-Experiment lässt sich ganz einfach bestimmen: Wir müssen dazu nur abzählen, wieviele Elemente A enthält und diese Zahl durch n dividieren. Mit anderen Worten:

Die Wahrscheinlichkeit eines Laplace-Experiments, dass Ereignis A eintritt, ist die Anzahl aller ________________________ Ausgänge dividiert durch die Anzahl aller ____________________________ Ausgänge dieses Laplace-Experiments.

In Formelschreibweise: ____________________________

(sog. ____)

Beispiel 11 *(Fortsetzung der letzten vier Beispiele)*

zu (c): P(A)= ____

P(B)= ____

Um uns die Abzählarbeit bei der Ermittlung der "günstigen" und der "möglichen" Ausgänge eines Laplace-Experiments zu erleichtern, bedienen wir uns der Kombinatorik. Dazu führen wir zwei Symbole ein:

______________________________ (sprich: "n Fakultät")

________________________ (sog. Binomialkoeffizient, sprich: "n über k")

Variation: Die Anzahl aller möglichen Anordnungen eines m-stufigen Experiments, bei dem auf der ersten Stufe k_1 verschiedene Ausgänge möglich sind, auf der zweiten Stufe k_2 verschiedene Ausgänge, usw. bis auf der m-ten Stufe k_m verschiedene Ausgänge, lautet: ____________________ .

Beispiel 12 *: Ein Würfel und eine kleine Pyramide werden gleichzeitig geworfen. Die 4 Pyramidenseiten seien mit den römischen Ziffern I, II, III und IV beschriftet.*

Hier ist k_1 = _____ *(Würfel) und* k_2 = _____ *(Pyramide).*

Also ergibt sich für die Anzahl der Möglichkeiten ____________________ .

Kombination: Sei n $\geq$ k. Die Anzahl aller Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten k Objekte ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge herauszunehmen, lautet: ______________

Beispiel 13 *:*

Mithilfe der Variationsregel und der Kombinationsregel lassen sich die Anzahl der Mglichkeiten in bestimmten Situationen herleiten.

Beispiel 14 *Die Anzahl aller möglichen Ausgänge $|\Omega|$, bei:*

(a) Zweimaliges Werfen eines Würfels. Hier ist $|\Omega| =$ ________________________

(b) Dreifacher Münzwurf. Hier ist $|\Omega| =$ ____________________________

Beispiel 15 *Lotto 6 aus 49:*

Die Anzahl aller Möglichkeiten, aus 49 Kugeln 6 Kugeln mit einem Griff herauszunehmen. Oder: Die Anzahl aller Möglichkeiten, auf einem Lottofeld mit 49 Plätzen 6 Kreuze zu machen, beträgt ____ .

Beispiel 16 *Auf wieviele verschiedene Arten können 10 Bücher in einem Bücherregal angeordnet werden? Man stelle sich dazu das Bücherregal eingeteilt in 10 Plätze nebeneinander vor. Für die Besetzung des 1. Platzes hat man noch alle 10 Bücher zur Auswahl, also 10 Möglichkeiten. Für den 2. Platz hat man nur noch 9 Möglichkeiten, für den dritten Platz 8, usw. bis für den letzten Platz nur noch 1 Buch übrigbleibt. Insgesamt sind das* ____

Möglichkeiten.

Beispiel 17 *Wieviele Möglichkeiten gibt es für die 4 - stellige Codezahl eines Safes, wenn für jede Stelle die Ziffern 0 bis 9 zur Verfügung stehen, aber keine der Ziffern doppelt vorkommen darf? Für die 1. Stelle gibt es noch alle 10 Möglichkeiten, für die 2. Stelle nur noch 9 Möglichkeiten, für die 3. Stelle 8 Möglichkeiten und für die 4. Stelle 7 Möglichkeiten; also insgesamt*

____ *Möglichkeiten.*

Beispiel 18 *In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, beschriftet mit den Ziffern 1 bis 10. Es darf 4 mal hineingegriffen werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn beim 1. Griff 1 Kugel herausgeholt werden darf, beim 2. Griff 2 Kugeln, beim 3. Griff 3 Kugeln und beim 4. Griff 4 Kugeln?*

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Begriff in der Wahrscheinlichkeitstheorie:

Seien A,B$\subseteq \Omega$ zwei Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B unter der Bedingung, dass Ereignis A bereits eingetreten ist, heißt ________________________ ____ und wird mit _________________ bezeichnet. (ausgesprochen: "P von B gegeben A")

Für $P(A) > 0$ sei

Beispiel 19

Zufallsexperiment: Zweimaliges Werfen eines Würfels. Die Ergebnismenge Ω ist:

Betrachte die Ereignisse:

A:

B:

Dann ist _________________ *die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass im zweiten Wurf Augenzahl "6" fällt unter der Bedingung, dass im ersten Wurf bereits Augenzahl "1" gefallen ist.*

Berechnung von

wobei ________________________________

und ____

Also ist

Falls nun gilt: ______________________________ , d.h. falls die Bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben A __________________________ von A ist und damit gleich der Wahrscheinlichkeit von B, dann heißen die Ereignisse A und B __________________________ voneinander und es gilt die folgende sog.

____ :

_______________________________________ .

Falls die ____

nicht erfüllt ist, sind A und B nicht voneinander unabhängig.

Beispiel 20 *(Fortsetzung vom letzten Beispiel)*

A=

B=

A∩B=

P(A)= *und P(B)=*

Daraus folgt:

P(A)·P(B)=

und damit ist

P(A∩B)=

Somit erfüllen A und B die Unabhängigkeitsgleichung, d.h. die Ereignisse A und B sind unabhängig.

Wir lernen jetzt noch zwei wichtige Formeln zum Rechnen mit Bedingten Wahrscheinlichkeiten kennen:

Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ Ereignisse mit $P(A_i) > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.

1) Die Formel von der Totalen (oder Vollständigen) Wahrscheinlichkeit

Für alle Ereignisse $B \subseteq \Omega$ gilt:

2) Die Formel von Bayes

Für alle Ereignisse $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$ gilt:

Sobald wir ein ____________________ Zufallsexperiment vorliegen haben, bei dem die Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge auf der 2. Stufe ____________ sind von den Ausgängen der 1. Stufe, hilft uns die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis der ____________ Stufe zu berechnen.

Beispiel 21

Gegeben sei eine Urne mit 3 schwarzen und 5 weißen Kugeln. Aus dieser Urne soll zweimal nacheinander mit verbundenen Augen je eine Kugel ________ Zurücklegen gezogen werden.

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die zweite gezogene Kugel schwarz ist. Seien folgende Ereignisse gegeben:

A_1:

A_2:

B:

Da wir ____________ *Zurücklegen ziehen, ist die Wahrscheinlichkeit der 2. Ziehung* ________________________ *vom Ergebnis der 1. Ziehung. (Warum? Und warum ist das* __________ *Zurücklegen nicht so?)*

Das heißt: Wir müssen die Formel von der Totalen Wahrscheinlichkeit anwenden, um P(B) zu berechnen:

Nun ist $P(A_1)=$ *und* $P(A_2)=$

sowie $P(B|A_1)=$ *und* $P(B|A_2)=$

Damit ergibt sich insgesamt:

Falls wir ein zweistufiges Zufallsexperiment vorliegen haben, bei dem alle Wahrscheinlichkeiten ____________ und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten ___________________ gegeben sind, so hilft uns die Formel von Bayes, die ________________________ Bedingte Wahrscheinlichkeit ___________________ für $1 \leq i \leq n$ auszurechnen.

Beispiel 22

Zur Erkennung von Krankheiten stehen in der Medizinischen Diagnostik Tests zur Verfügung, die so angelegt sind, dass sie ______________ ausfallen sollen, falls eine Erkrankung vorliegt, und ________________ , falls keine Erkrankung vorliegt.

Diese Bedingungen sind in der Realität aber nicht hundertprozentig erfüllt.

Nehmen wir an, es geht um einen medizinischen Test für eine seltene Krankheit.

Sei A_1 das Ereignis: ______________________________________

und A_2 das Ereignis: ______________________________________

Nehmen wir an, es sei $P(A_1)=$ _________ *. Dann ist $P(A_2)=$* _________ *.*

Sei nun B das Ereignis: ______________________________________ *.*

Nehmen wir ferner an, der Test erfülle folgende Wahrscheinlichkeiten:

sowie

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person auch wirklich erkrankt ist, d.h. wie groß ist ____________________ *?*

Mit der Formel von Bayes erhalten wir:

Das heißt: Bei nur _______________ *aller positiv getesteten Personen liegt auch wirklich eine Erkrankung vor, alles andere sind Fehldiagnosen!*

Warum ist dieser Prozentsatz so gering?

Dazu folgende Erklärung:

Wegen ______________________________ *ist bei* ______________________ *Personen mit* ________ *Kranken und* ________________ *Gesunden zu rechnen.*

Von den _____ *Kranken werden* ________ *positiv getestet, das sind* _____ *Personen.*

Von den ________________ *Gesunden werden fälschlicherweise* ___________ *positiv getestet, das sind* ___________ *Personen.*

Insgesamt werden also ______________________________________ *Personen positiv getestet. Aber nur die* _____ *davon sind wirklich krank! Und das sind wie gehabt* ____ .

Letztendlich ist dieser Prozentsatz deswegen so niedrig, weil die Krankheit so selten ist, und der Anteil der fälschlicherweise positiv getesteten Gesunden so hoch wird. Falls nämlich _________________________________ *und damit* _________________________________ *, dann sieht das Ergebnis schon ganz anders aus:*

Falls _________________________________ *und* _________________________________ *,*

dann berechnet sich ein noch höherer Prozentsatz:

Das bedeutet: Je weniger selten eine Krankheit, desto zuverlässiger ist der Test, genauer gesagt: desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer positiv getsteten Person auch wirklich eine Erkrankung vorliegt.

4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bei vielen Zufallsexperimenten interessiert man sich nicht nur für die Ergebnismenge Ω, sondern auch für Zahlenwerte, die den einzelnen Ergebnissen (oder Ausgängen) $\omega \in \Omega$ eines Zufallsexperiments zugeordnet werden. Für solche Zuordnungen verwendet man in der Wahrscheinlichkeitsthoerie sog. ______________________ .

Eine ________________________ wird meist mit einem Großbuchstaben (X oder Y oder Z od.a.) bezeichnet und ist eine ________________ , die jedem Ausgang $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet. Die Menge aller $X(\omega)$ bezeichnet man als ____________________ von X, kurz: _______ . Die Elemente von _____ heißen ________ oder ____________________ von X.

Beispiel 23

(a) *Zweimaliges Werfen eines Würfels. Die Zufallsvariable X sei eine Funktion, die jedem Ausgang $\omega \in \Omega$ ihre Augensumme zuordne. Der Wertebereich von X ist somit* __________________________________ .

Beispiele von Wertzuordnungen sind:

_________________ , _________________ , *usw.*

(b) *10-maliges Werfen eines Würfels. Hier ist die Ergebnismenge:*

Die Zufallsvariable Y sei eine Funktion, die jedem Ausgang $\omega \in \Omega$ den Anteil der Würfe zuordne, wie oft unter den 10 Würfen eine "6" gewürfelt wurde. Dann ist z.B.

oder

Der Wertebereich von Y ist die Menge

____ .

(c) *Zufällig vorbeigehende Studenten in der Mensa werden nach ihrem Studienfach befragt. Hier soll die Zufallsvariable Z jedem Student den Zahlenschlüssel seines Studienfachs zuordnen, etwa Psychologie=1, Biologie=2, Elektrotechnik=3, Maschinenbau=4.*

Dann wäre der Wertebereich von Z: ___________________________

(d) *Von zufällig ausgewählten Patienten eines Arztes werden Körpergröße (in cm) und Gewicht (in kg) gemessen. Hier soll die Zufallsvariable X jedem befragten Patient ω ein Messdatenpaar mit Körpergröße und Gewicht zuordnen, z.B.*

______________________________________ .

Der Wertebereich $W(X)$ von X ist dann die Menge aller solchen Messdatenpaare:

Je nachdem, wie der Wertebereich einer Zufallsvariablen aussieht, machen wir folgende Unterscheidung:

Eine Zufallsvariable heißt ____________________ , falls ihr Wertebereich eine Teilmenge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ oder der gebrochen-rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist (wie in den vorhergenden Beispielen (a), (b) oder (c)).

Eine Zufallsvariable heißt ____________________ , falls ihr Wertebereich ein Intervall aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist (wie Körpergröße und Gewicht im vorhergehenden Beispiel (d)).

Als nächstes interessiert es uns, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einem Zufallsexperiment eine bestimmte Realisierung der Zufallsvariablen X auftritt, d.h. wie wahrscheinlich die einzelnen Werte aus W(X) sind.

Bei ____________________ Zufallsvariablen X werden diese Wahrscheinlichkeiten von der sog. ____

f_X angegeben. Diese Funktion f_X ist wie folgt definiert:

Es gelten folgende Eigenschaften:

(1)

(2)

Beispiel 24

Zweimaliger Wurf eines Würfels. Zufallsvariable X = Augensumme beider Würfe.

Dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X:

$f_X(2) =$

$f_X(3) =$

$f_X(4) =$

usw.

Insgesamt: ____

Falls wir uns z.B. für das Ereignis "Augensumme zwischen 3 und 4" interessieren, so berechnet sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses wie folgt:

Bei ____________________ Zufallsvariablen gibt uns die sog. ____________________ ____ (oder kurz ____________________) f_X an, wie wahrscheinlich es ist, dass die Werte einer Zufallsvariablen X in ein Intervall [a,b] fallen. Eine ____ f_X ist eine nicht negative integrierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1)

(2)

Eigenschaft (1) besagt, dass die Fläche unter dem Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte f_X über dem Intervall [a,b] gleich der Wahrscheinlichkeit P(a≤X≤b) ist (d.h. der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X Werte im Intervall [a,b] annimmt) und Eigenschaft (2) besagt, dass die Gesamtfläche unter dem Graphen von f_X gleich 1 ist.

Beispiel 25

Wir stehen an einer Bushaltestelle und messen die Wartezeit der Personen, die auf ihren Bus warten. Wir interessieren uns für das Ereignis: "Die Wartezeit beträgt zwischen 5 und 10 Minuten".

Üblicherweise wird diese Wartezeit durch eine Zufallsvariable X beschrieben mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichte:

Dann besitzt X die sog. Exponentialverteilung mit Parameter λ. Wir rechnen Eigenschaft (2) nach:

Gemäß Eigenschaft (1) berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für obiges Ereignis:

Schließlich lernen wir noch die ____________________________ F_X einer Zufallsvariablen X kennen. Sie ordnet jeder reellen Zahl t folgende Wahrscheinlichkeit zu:

Für eine Verteilungsfunktion F_X ergeben sich folgende Eigenschaften:

(1) Für alle $a < b$ gilt ____________________________ ;

(2) $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) =$ _____ , $\lim_{t\to\infty} F_X(t) =$ _____ ;

(3) F_X ist monoton wachsend, d.h. ________________________ ;

(4) F_X ist rechtsseitig stetig, d.h ________________________ .

Es gilt:

Durch die Verteilungsfunktion F_X einer Zufallsvariablen X werden alle ihre wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften eindeutig festgelegt. (!) In diesem Sinne sprechen wir von der __________________________________

__________ oder kurz: ________________ einer Zufallsvariablen X.

Für ____________________ Zufallsvariablen folgt:

mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X.

Für ____________________ Zufallsvariablen gilt:

mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte f_X.

Bei stetigen Zufallsvariablen entspricht $F_X(t)$ dem Flächeninhalt unter dem Graph der Dichte f_X über dem Intervall $(-\infty$,t] auf der x-Achse:

Beispiel 26

(a) Beispiel für eine diskrete Zufallsvariable: Zweimaliger Wurf eines Würfels, X = Augensumme beider Würfe. Mit Hilfe der Verteilungsfunktion berechnen wir das Ereignis "Augensumme kleiner oder gleich 4" wie folgt:

(b) *Beispiel für eine stetige Zufallsvariable: Wir betrachten X = Wartezeit von Personen an einer Bushaltestelle. Mit Hilfe der Verteilungsfunktion berechnen wir das Ereignis "Die Wartezeit beträgt höchstens 7 Minuten" wie folgt:*

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Begriff in der Theorie der Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welcher insbesondere im Zusammenhang mit Statistischen Tests häufig vorkommt:

Für ein ______________________ nennen wir das ________________________

einer Zufallsvariablen X die kleinste reelle Zahl für die gilt:

Ist die Verteilungsfunktion F_X stetig, dann gilt ________________ .

______ bezeichnet also diejenige Stelle auf der x-Achse, bis zu welcher der Flächeninhalt unter dem Dichtegraphen genau ____ ist.

Das 0,5-Quantil $x_{0,5}$ wird auch ____________________ genannt (in Anlehnung an den ____________________ einer Messreihe);

Das 0,25-Quantil $x_{0,25}$ heißt _________________________ und das 0,75-Quantil $x_{0,75}$ heißt _________________________ . Die Differenz ______________________________ der beiden Quartile heißt ____ .

Ganz analog zu den Statistischen Kennwerten Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ und Varianz s^2 einer _______________________ werden wir hier den _________________________ ____________________ und die _________________________ einer ____________________ ____________________ definieren. (Wir schreiben manchmal auch ____________________ und _________________________ , um zu verdeutlichen, dass Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen X gemeint sind.) Die positive Quadratwurzel aus der Varianz _______ einer Zufallsvariablen heißt auch _________________________ (wie die Standardabweichung s einer Messreihe).

Bei _______________________ Zufallsvariablen gilt:

(Hier ist f_X die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion.)

Bei ________________ Zufallsvariablen gilt:

(Hier ist f_X die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte.)

Ganz allgemein gibt der Erwartungswert einer Zufallsvariablen die Mitte (oder auch den Schwerpunkt) ihrer Verteilung an und die Varianz einer Zufallsvariablen gibt die mittlere quadratische Abweichung ihrer Verteilung vom Erwartungswert an.

Wie bei der Varianz einer Messreihe gibt es auch hier bei der Varianz einer Zufallsvariablen eine alternative Berechnungsformel für die Varianz:

Bei ________________________ Zufallsvariablen:

Falls

dann ist

Bei ___________________ Zufallsvariablen:

Falls

dann ist

Beispiel 27

(a) *diskreter Fall: Zweimaliger Wurf eines Würfels, X= Augensumme beider Würfe, W(X)=* $\{2,3,\ldots..,12\}$*. Wir berechnen Erwartungswert und Varianz wie folgt:*

(b) *stetiger Fall:* X = *Wartezeit von Personen an einer Bushaltestelle. Hier berechnen sich Erwartungswert und Varianz wie folgt:*

Wir betrachten nun Rechenregeln für den Erwartungswert und die Varianz. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen und a eine reelle Zahl. Dann gilt:

Für die Varianz der Summe von Zufallsvariablen gilt eine ähnliche Rechenregel. Dazu definieren wir den Begriff der Unabhängigkeit für Zufallsvariablen.

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, falls für alle Vektoren $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, dann gilt:

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein: Wir schreiben: ”X_1,.....,X_n i.i.d.” für ”X_1,.....,X_n ______________________ ______________________ ______________________”, was bedeutet, dass die Zufallsvariablen X_1,.....,X_n alle voneinander unabhängig sind und alle dieselbe Verteilung besitzen; insbesondere haben sie alle denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz.

(Man denke z.B. an den n-fachen Wurf eines Würfels; hier sind alle Würfe voneinander unabhängig, d.h. kein Wurf beeinflusst den anderen, und jeder Wurf besitzt dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung. Genauso beim n-fachen Münzwurf oder beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit Zurücklegen, usw..)

Wir lernen nun wichtige diskrete Verteilungen kennen:

Geometrische Verteilung

Wir betrachten ein ______________________ Zufallsexperiment. Auf jeder Stufe seien genau zwei Ausgänge möglich, einmal _______________ mit Wahrscheinlichkeit p, wobei $0<p<1$, und einmal _________________________ mit Wahrscheinlichkeit 1-p. Die Ausgänge der einzelnen Stufen seien ______________________________ voneinander (d.h. sie beeinflussen sich nicht gegenseitig). Ein solches Zufallsexperiment nennen wir auch eine Folge von

____ mit ____________________

____ p.

Die Zufallsvariable X beschreibe nun die Anzahl der Versuche bis einschliesslich des ersten Treffers. Dann gilt:

Jede Zufallsvariable X mit einer solchen Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X heißt

____ mit Parameter _____ , kurz:

____ .

Ist ______________ , dann besitzt die Zufallsvariable X den Erwartungswert

_________________ und die Varianz ___________________________ .

Beispiel 28

Ein Würfel wird so lange wiederholt geworfen, bis zum ersten Mal eine 6 erscheint. Es ist ____________ zu wählen. Für die Wahrscheinlichkeit, daß höchsten 3 Würfe benötigt werden, erhält man

Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von n Bernoulli-Versuchen mit Trefferwahrscheinlichkeit p, wobei $0 < p < 1$. Die Zufallsvariable X beschreibe nun die Anzahl der Treffer in einer solchen Versuchsreihe. Dann gilt:

Jede Zufallsvariable X mit einer solchen Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X heißt

_______________________________________ mit den Parametern _____ und _____ ,

kurz: _______________________________________ .

Es gilt:

Dabei gibt der Erwartungswert die mittlere Anzahl der Treffer an.

Beispiel 29

10 zufällig ausgewählte Studenten einer Vorlesung werden gefragt, ob sie Rechtshänder oder Linkshänder sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person Rechtshänder ist, betrage 0,95. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Rechtshänder unter den 10 Studenten. Dann können wir davon ausgehen, dass X ________________ ______________ *ist mit den Parametern* __________ *und* ______________ .

Wieviele Rechtshänder unter den 10 Studenten können wir erwarten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 10 Studenten mindestens 8 Rechtshänder sind? Es gilt:

Poissonverteilung

Die Anzahl der Stufen eines ____________________ Zufallsexperiments sei ____________________ und die Trefferwahrscheinlichkeit p sei __________ __________ , d.h. wir betrachten ____________ Ereignisse.

In diesem Fall lässt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_X einer binomialverteilten Zufallsgröße X annähernd berechnen durch:

(wobei e≈2,72 die sog. Euler'sche Zahl ist). Jede Zufallsvariable X mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion

heißt ________________________________ mit Parameter ______

kurz: ____________________ . Es gilt

Beispiel 30

Nicht nur 10 zufällig ausgewählte Studenten, sondern 1000 werden gefragt, ob sie Rechts- oder Linkshänder sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Rechtshänder ist, betrage wieder 0,95. Da die Poissonverteilung die Verteilung ________________ ________________ ist, fragen wir nach der Anzahl Y der Linkshänder. Die Zufallsvariable Y ist dann annähernd Poisson-verteilt mit Parameter ______________ (für ______________ und ______________). Im Mittel können wir unter den 1000 Studenten ________________________________ Linkshänder erwarten. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass von den 1000 Studenten genau 40 Studenten Linkshänder sind. Diese berechnet sich wie folgt:

Hypergeometrische Verteilung

Aus einer Urne, welche M schwarze und N-M weiße Kugeln enthält, werden ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen. Die Zufallsvariable X beschreibe nun die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Dann gilt:

Jede Zufallsvariable X mit einer solchen Wahrscheinlichkeitsfunktion heißt

____

mit den Parametern _____ , _____ und _____ , kurz: ________________ .

Es gilt:

Beispiel 31

Es ist bekannt, dass es unter 1000 Studenten 50 Linkshänder gibt. Es werden nun von diesen 1000 Studenten 10 zufällig ausgewählte und gefragt, ob sie Rechtshänder oder Linkshänder sind. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Rechtshänder unter den 10 Studenten. Dann können wir davon ausgehen, dass X ___________________ .

Wieviele Rechtshänder unter den 10 Studenten können wir erwarten?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 10 Studenten mindestens 8 Rechtshänder sind? Es gilt:

Bemerkung zum Urnenmodell: Aus einer Urne, welche M schwarze und N-M weiße Kugeln enthält, werden **mit** Zurücklegen n Kugeln gezogen. Für die Zufallsvariable X, die nun die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln beschreibe, gilt

Wir kommen nun zu den stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die wichtigste davon ist die ______________________________ und ihr Spezialfall, die ______________________________ .

Normalverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt ______________________ mit ______________________ und ________________ , kurz ______________________ , falls ihre Wahrscheinlichkeitsdichte f_X folgende Gestalt hat:

wobei π ≈3,14 und e≈2,72.

Den zu f_X gehörigen Graphen bezeichnet man aufgrund seiner Gestalt auch als ______________________________ . Sie ist symmetrisch zu _____ und umso flacher, je größer _____ ist. Die Fläche unter dem Graph ist 1. Bei __________ und __________ liegen Wendepunkte.

Beispiel 32

(a)

(b)

Eine normalverteilte Zufallsvariable Z mit Erwartungswert __________ und Varianz __________ nennt man ____, kurz ___________________________________ . Die zugehörige Verteilung heißt ____ . Die zugehörige Verteilungsfunktion wird mit _____ bezeichnet, ihre Werte sind tabelliert. (Diese Tabellen findet man im Anhang von Statistik-Büchern, z.B. Tabelle B im Anhang vom Bortz.) Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariablen Z hat folgende Gestalt:

Zugehöriger Dichtegraph:

______________________________ entspricht dem Flächeninhalt von ________ bis _____ unter dem Dichtegraphen einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z.

Es gibt eine Möglichkeit, jede ______________________________ Zufallsvariable

X in eine ______________________________ Zufallsvariable Z

zu transformieren. Dies hat den Vorteil, dass man nur noch __________ Tabelle,

nämlich die der ______________________________ ,

benötigt.

Sei dazu X eine ______________________________ Zufallsvariable.

Definiere nun die sog. ______________________________ Zufallsvariable Z wie

folgt:

Diese ______________________________ Zufallsvariable Z ist

______________________________ .

Die Bedeutung der Normalverteilung zeigt der folgende Satz.

Zentraler Grenzwertsatz

Sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(Y_i) = 0$

und $Var(Y_i) = 1$ für alle natürlichen Zahlen i, dann gilt für alle reellen Zahlen x:

Der Zentrale Grenzwertsatz besagt grob, der Gesamteffekt, der Summe vieler kleiner zentrierter unabhängiger Einzeleffekte ist, ist näherungsweise normalverteilt.

Aufgrund des Zentralen Grenzwertsatz lassen sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung Näherungswerte für bestimmte Wahrscheinlichkeiten angeben.

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$ für $1 \leq i \leq n$, dann gilt für alle $a < b$:

Eine B(n,p)-verteilte Zufallsvariable X ist als Summe $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ unabhängiger B(1,p)-verteilter Zufallsvariablen darstellbar. (X_i nehmen den Wert eins an, wenn man auf der i-ten Stufe des Zufallsexperiments einen Treffer erhält. Bei Fehlschlag auf der i-ten Stufe nimmt X_i den Wert null an.) Somit gilt näherungsweise für $a < b$:

Im folgenden betrachten wir nun weitere stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Auf deren Bedeutung werden wir später noch eingehen.

Chi-Quadrat (kurz: χ^2) - Verteilung

Seien $Z_1,.....,Z_n$ i.i.d. N(0,1)-verteilte Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable

____ mit ____

___________________________________, kurz: __________________________ .

t-Verteilung

Seien Z, $Z_1,.....,Z_n$ i.i.d. N(0,1)-verteilte Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable

_________________ mit ___________________________________ ,

kurz: __________________________ .

F-Verteilung

Seien $Z_1,.....,Z_{n_1},Z_{n_1+1},.....,Z_{n_1+n_2}$ i.i.d. N(0,1)-verteilte Zufallsvariablen. Dann heißt die Zufallsvariable

_________________ mit ____

und ____ ,

kurz: __________________________ .

5 Parameterschätzung

In den ersten beiden Kapiteln haben wir uns mit der Beschreibenden Statistik beschäftigt. Sie dient dazu, vorhandenes Datenmaterial durch Berechnung charakteristischer Kennzahlen übersichtlicher zu machen.

Wir kommen nun zu der Schließenden Statistik. Sie dient dazu, aufgrund des vorliegenden Datenmaterials auf die dem zufälligen Vorgang der Datenerhebung zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zurückzuschließen, kurz: Von einer ________________ ______________ auf die ____ zu schließen.

Dabei bezeichnen wir als ____ oder auch ______________________________ die Menge aller zu untersuchenden Elemente, die Träger eines bestimmten Merkmals sind. Als ___________________________ bezeichnen wir eine beschreibbare Teilmenge daraus.

Beispiel 33

(a) Grundgesamtheit: Alle Wähler bei einer Bundestagswahl. Eine mögliche Stichprobe daraus wäre die Teilmenge derjeniger Wähler, die vor einem Wahllokal von einem Fernsehteam befragt werden.

(b) Grundgesamtheit: Alle Käufer eines bestimmten Produkts. Eine mögliche Stichprobe daraus wäre die Teilmenge derjeniger Käufer, die innerhalb einer bestimmten Zeitspanne Reklamationen an den Produkthersteller richten.

Der Statistiker interessiert sich nun sehr oft für bestimmte Statistische Kennwerte der Grundgesamtheit. Oft jedoch ist es z.B. aus Kostengründen nicht möglich, mit der ganzen Grundgesamtheit eine Statistische Erhebung durchzuführen, um diese Statistischen Kennwerte zu ermitteln. So begnügt man sich meist damit, eine Statistische Erhebung nur mit einer Stichprobe durchzuführen, um durch die Statistischen Kennwerte der Stichprobe (sog. ______________________________

____________________________________) wenigstens Näherungswerte für die gesuchten Statistischen Kennwerte der Grundgesamtheit zu erhalten.

Diese aus irgendwelchen Gründen nicht ermittelbaren Statistischen Kennwerte der Grundgesamtheit bezeichnet man als

____ .

Mögliche Parameter sind: __________________________________ oder

_____________________________ eines Merkmals der Grundgesamtheit.

Um jedoch deutlich zu machen, dass damit die nicht ermittelbaren (oder anders ausgedrückt: die gesuchten) Statistischen Kennwerte der Grundgesamtheit gemeint sind, verwendet man für die Parameter statt _____ und _____ die griechischen Buchstaben _____ und _____ (wie bei Zufallsvariablen).

Im Unterschied dazu bezeichnen wir den ermittelbaren (oder anders ausgedrückt: den gegebenen) Stichprobenmittelwert mit _____ und die Stichprobenvarianz mit _____ (dazu kommen wir später noch).

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine Stichprobe auszuwählen; der Statistiker sagt: eine Stichprobe zu ziehen. Generell sollte die Stichprobe stets sehr sorgfältig gezogen werden, damit sie die Grundgesamtheit möglichst genau repräsentiert. Eine solche Stichprobe nennt man dann eine repräsentative Stichprobe.

Beispiel 34 *(Zum letzten Beispiel)*

(a) Je nach Zeitpunkt der Befragung und je nach Wahllokal sind beliebig viele unterschiedliche Stichproben möglich.

(b) Je nach Zeitspanne und Produkt sind auch hier beliebig viele unterschiedliche Stichproben möglich.

Die letzten beiden Beispiele machen deutlich, dass sich die Ziehung einer Stichprobe aus einer Grundgesamtheit in gewisser Weise als ein ______________________________

______________________________ betrachten lässt.

Für eine Stichprobe der Größe n können wir dann die Befragung der i-ten Person (z.B. im Kontext der letzten beiden Beispiele (a)) jeweils durch eine ____________________ (für i=1,.....,n) beschreiben, wobei die ____________________ als i.i.d. angenommen werden.

Das Befragungsergebnis der i-ten Person ist dann eine Realisierung der ________________ (für i=1,.....,n). Diese Realisierung schreiben wir mit Kleinbuchstaben _____ als Unterscheidung zur Zufallsvariablen _____ (für i=1,.....,n).

Der Statistiker redet dann oft von der Stichprobe ______________________________ und meint damit den eben beschriebenen Sachverhalt.

Wie zieht nun der Statistiker Rückschlüsse von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, d.h. wie geht das?

Dazu verwendet er sog. ____________________ . Ein ____________________ ist eine n-dimensionale Funktion mit den Zufallsvariablen ____________________ als Platzhaler, die angibt, wie man den gesuchten Parameter der Grundgesamtheit aus den Stichprobenergebnissen näherungsweise berechnen kann.

Wenn man dann die vorliegenden Stichprobenrealiesierungen ____________________ anstelle der Platzhalter ____________________ in die Schätzfunktion einsetzt, erhält man einen konkreten Schätzwert.

Ein häufig verwendeter Schätzer für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit ist ____ . _____ ist selbst wieder eine __________ . Durch Einsetzen der Realisierungen einer bestimmten Stichprobe erhält man den Schätzwert ____ , das ist gerade der ____ .

Beispiel 35

Eine Sportlehrerin interessiert sich für die durchschnittliche Körpergröße 12-jähriger Jungen, um ihren Geräteaufbau bei einem Sportfest für diese Altersklasse optimal planen zu können.

Dazu misst sie die Größe von zehn 12-jährigen Jungen aus ihrer Schulklasse und berechnet aus diesen zehn Messergebnissen den (Stichproben-)Mittelwert.

Die vorliegende Grundgesamtheit ist hier die Menge aller ______________________ ______________ *. Der gesuchte Parameter der Grundgesamtheit ist die* ______________ ______________________________ *eines* ______________________________________ *.*

Die von der Sportlehrerin gezogene Stichprobe sind die ____________________________ ___________________ *aus ihrer Schulklasse.*

Wir können nun die Größe jeder dieser zehn Jungen durch eine ___________________ *beschreiben (für i=1,.....,10), wobei wir diese* ____________________________ *als i.i.d. annehmen.*

Der von der Lehrerin verwendete Schätzer ist _________________________________ *.*
Durch Einsetzen der Messergebnisse ___________________ *erhält sie den Schätzwert* ____________________________ *, das ist gerade der Stichprobenmittelwert, als näherungsweise Schätzung für den unbekannten Parameter* _____ *.*

Wenn wir aus derselben Grundgesamtheit nicht nur eine, sondern beliebig viele Stichproben ziehen, können wir den Stichprobenmittelwert _____ für jede einzelne Stichprobe berechnen. Diese Stichprobenmittelwerte werden mehr oder weniger stark vom Populationsparameter _____ abweichen. Je weniger sie von _____ abweichen, desto besser oder genauer schätzt ein Stichprobenmittelwert _____ den Parameter _____ .

Anders ausgedrückt: Je geringer die Streuung der Verteilung der Zufallsvariablen _____ (bei diesen vielen Stichproben) ausfällt, d.h. je geringer die Schwankung von _____ um _____ , desto besser schätzt ein einzelner Stichprobenmittelwert _____ den unbekannten Parameter _____ .

Dies alles gilt nicht nur für den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$, sondern auch für jeden anderen Stichprobenkennwert, z.B. für die Stichprobenvarianz. Es gilt stets: Je geringer die ____________________ der sog. Stichprobenkennwerteverteilung, desto genauer schätzt ein einzelner Stichprobenkennwert den gesuchten Parameter.

Die Streuung der Stichprobenkennwerteverteilung heißt _________________________ . Speziell heisst die Streuung von $\overline{X}$ Standardfehler des Mittelwerts und wird mit __________ bezeichnet.

Es gilt nun: Je größer die Streuung der Messwerte in der Grundgesamtheit, desto größer ist auch __________ . Und: Je größer der ________________________________ ______________________ , desto kleiner ist __________ .
(Denn: Der wachsende ____ nähert sich immer mehr der Größe der Grundgesamtheit, und demzufolge bildet auch die Stichprobe immer besser die Eigenschaften der Grundgesamtheit ab, was insbesondere für den Mittelwert gilt. Und dies bedeutet gerade, dass die Streuung von _____ immer geringer wird.)

Es gibt in der Statistik viele verschiedene Arten, Schätzer zu definieren. Das Ziel bei der Definition sollte immer sein, einen solchen Schätzer (d.h. eine solche Schätzfunktion) zu finden, dessen (zur Stichprobe gehöriger) Schätzwert den gesuchten Parameter der ______________________________ am besten schätzt, d.h. am besten annähert.

Dazu wurden in der Statistik Gütekriterien entwickelt, welche die verschiedenen Schätzer beurteilen. Die bekanntesten Gütekriterien sind ______________________ ______________ , ____________________ , __________________ und __________ __________________ . Wir werden hier nur die ______________________________ ______________ herausgreifen:

Ein Schätzer heißt ____________________________________ , falls der ________________________________ des Schätzers gleich dem gesuchten Parameter der Grundgesamtheit ist, falls also der Schätzer den gesuchten Parameter im Mittel auch wirklich trifft.

Beispiel 36 *(Zum letzten Beispiel)*

Der von der Lehrerin verwendete Schätzer ist __________________________________ .

Wegen ______________________________ *ist* ________________________________ .

Damit und wegen den Rechenregeln für den Erwartungswert gilt:

womit das Kriterium für die Erwartungstreue erfüllt ist. Somit ist _____ *ein erwartungstreuer Schätzer für den Mittelwert* _____ *eines Merkmals der Grundgesamtheit.*

Ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz _____ eines betrachteten Merkmals in der Grundgesamtheit ist

Die Forderung der Erwartungstreue bedingt den Vorfaktor __________ im Unterschied zur Definition der Varianz _____ einer Messreihe; hier ist der Vorfaktor _____ :

Falls wir in den erwartungstreuen Schätzer _____ die Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ einer Stichprobe einsetzen, dann nennen wir den so erhaltenen Schätzwert

Die positive Quadratwurzel daraus:

heisst ____ .

Der zugehörige Schätzer

ist allerdings __________ erwartungstreuer Schätzer für die Streuung _____ des betrachteten Merkmals in der Grundgesamtheit.

Der gesuchte Parameter der Grundgesamtheit muss aber nicht unbedingt _____ oder _____ sein, es können auch andere ____ sein.

Generell gibt es verschiedene Methoden, wie man einen Schätzer für einen beliebig vorgegebenen Parameter der Grundgesamtheit bestimmen kann, wie z.B. die sog.

____

oder die sog. ______________________________ .

Wir werden hier eine häufig verwendete Methode zur Bestimmung eines Schätzers kennenlernen, die sog. ____

__________________ . Mit dieser Methode lässt sich ein Schätzer für einen unbekannten Parameter der Grundgesamtheit ermitteln, vorausgesetzt die Verteilung des untersuchten Merkmals ist bekannt.

Dass heißt, die Zufallsvariable X_i (für $i = 1, \ldots, n$) der i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ besitzt eine vom unbekannten Parameter θ der Grundgesamtheit abhängige bekannte Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion ______ .

Man wähle nun zur Stichprobenrealisierung $x_1, \ldots, x_n$ denjenigen Wert _____ als Schätzwert für den unbekannten Parameter _____ der Grundgesamtheit, unter dem die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ergebnisses am größten (bzw. die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichten) ist.

Die Funktion ____

wird Likelihood-Funktion genannt. Jedes _____ , welches die Likelihood-Funktion maximiert ist ein sogenannter Maximum-Likelihood-Schätzwert.

Beispiel 37

Ein Hersteller produziert Blitzgeräte. Er interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit _____ , mit der ein defektes Blitzgerät produziert wird. Diese Wahrscheinlichkeit _____ ist also der gesuchte Parameter der Grundgesamtheit aller produzierten Blitzgeräte.

Zur Bestimmung des Parameters _____ entnimmt der Hersteller eine Stichprobe von _____ produzierten Blitzgeräten und stellt fest, dass davon _____ Blitzgeräte defekt sind.

Die Stichprobe kann somit durch _____ i.i.d. ________________________ Zufallsvariablen ______________ beschrieben werden mit den Ausprägungen _________ , falls Blitzgerät intakt und _________ , falls Blitzgerät defekt (für i=1,.....,n). Es gilt:

Gesucht wird dasjenige _____ , für das die Likelihood-Funktion ______________ wird.

Dazu wenden wir zuerst auf beiden Seiten der obigen Gleichung den Logarithmus an, denn dabei bleiben die Maximalstellen unverändert. Es ergibt sich unter Beachtung der Logarithmus-Rechenregeln:

Jetzt differenzieren wir und setzen die erste Ableitung gleich Null, um eine Extremstelle zu ermitteln:

Die so gefundene Extremstelle ____________ *ist tatsächlich ein Maximum, wie man anhand des negativen Vorzeichens der zweiten Ableitung überprüfen kann.*

Das bedeutet: Der durch diese Methode gefundene sog. ________________________
____ *für den Parameter* _____ *der Grundgesamtheit ist* _____ *, und das ist gerade die relative Häufigkeit defekter Blitzgeräte in der Stichprobe.*

6 Intervallschätzung

Bei der Parameterschätzung haben wir einen Schätzwert für einen gesuchten Parameter bestimmt. Der konkret gefundene Schätzwert sagt aber noch nichts darüber aus, wie groß seine Abweichung vom gesuchten Parameter in Wirklichkeit ist.

Bei der Intervallschätzung wird nicht ein einzelner Schätzwert ermittelt, sondern ein ganzes Intervall, in dem der gesuchte Parameter mit einer bestimmten vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ darin liegt. Solche Intervalle heißen ____________________ ______________________ (oder ____) zum ____ .

Um eine gewisse Genauigkeit zu gewährleisten, sollten Konfidenzintervalle möglichst klein sein. Generell gilt, dass der Stichprobenumfang die Größe des Konfidenzintervalls beeinflusst, und zwar benötigt man für ein _______________ Konfidenzintervall einen _________________ Stichprobenumfang bei gleichem α.

Ein Konfidenzintervall ist eindeutig festgelegt durch seine obere und untere ____ .

Für Diese gibt es Berechnungsformeln, sog. Konfidenzintervall-Formeln, in denen sich die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ als Platzhalter für die Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_n$ befinden.

Sei also $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe i.i.d. ____________ -verteilter Zufallsvariablen.

Wir unterscheiden zunächst vier Fälle:

Fall 1:

Der gesuchte Parameter der Grundgesamtheit sei der ____________________________ .

Die __________________________ aus der ______________________________________

sei bekannt. Dann berechnet sich ein Konfidenzintervall für _____ zum Konfidenzniveau _________________ gemäß der Formel:

dabei ist _____ der Stichprobenmittelwert und ____________ ist das _______________ – _________________ der Standardnormalverteilung N(0,1).

Die wichtigsten Quantile der N(0,1)-Verteilung zur Konfidenzintervall-Berechnung finden sich in folgender sog. "**z-Tabelle**": (Quantile z_p der N(0,1)-Verteilung)

p	0.55	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
z_p	0.126	0.253	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Weitere Quantile der N(0,1)-Verteilung erhält man mit der Gleichung:

________________________ , z.B.: ______________________________________ .

Beispiel 38

Bei einer Untersuchung über das Verhalten von Schulkindern im Straßenverkehr interessiert sich ein Psychologe für den Erwartungswert μ der Reaktionszeit von 10-jährigen Schülern in einer bestimmten Verkehrssituation.

Aus früheren Untersuchungen weiß er, dass sich die Reaktionszeit durch eine ____________________ -verteilte Zufallsvariable beschreiben lässt. Bei 61 Messungen errechnete er einen Stichprobenmittelwert für die Reaktionszeit von $\bar{x} = 0.8$ s.

Für die Berechnung der Konfidenzintervall-Grenzen benötigen wir noch den zugehörigen Wert aus der z-Tabelle:

Damit ergibt sich insgesamt das folgende Konfidenzintervall:

Wir haben hier ein Konfidenzniveau von __________ vorliegen. Das bedeutet exakt formuliert: Bei ____________ aller gleichgroßen Stichproben liefert dieses Konfidenzintervall-Schätz-Verfahren ein Intervall, in dem der gesuchte Parameter μ auch wirklich drinliegt. Bei den restlichen ________ liefert es ein Intervall, in dem der gesuchte Parameter μ nicht drinliegt.

Veranschaulichen lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt:

Die exakte Interpretation unseres oben ausgerechneten Konfidenzintervall lautet somit: Falls unsere Stichprobe zu den __________ "zutreffenden" Stichproben gehört, dann liegt die erwartete Reaktionszeit μ *von 10-jährigen Schülern (in dieser betimmten Verkehrssituation) zwischen _______ und _______ Sekunden.*

Fall 2:

Genauso wie Fall 1, nur diesmal sei die Varianz σ^2 unbekannt. Diese Veränderung bewirkt, dass in der Formel statt σ^2 die Stichprobenvarianz $\bar{S}^2$ vorkommt und statt N(0,1)-Quantile kommen Quantile der t-Verteilung vor. In diesem Fall berechnet sich ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gemäß der Formel:

wobei ____________________ das ______________________________ der __________-Verteilung ist. Die Stichprobenvarianz $\bar{S}^2$ berechnet sich gemäß der Formel:

Beispiel 39 *(Fortsetzung des letzten Beispiels)*

Angenommen, die Varianz σ^2 sei unbekannt, und aus den Realisierungen der Stichprobe errechnet sich eine Stichprobenvarianz von $\bar{S}^2 = 0,0484$. Aus Tabelle D ermitteln wir: ___________________________________ *. Damit ergibt sich insgesamt für das gesuchte Konfidenzintervall:*

Dieses Konfidenzintervall ist größer als in Fall 1, weil wir hier in Fall 2 wegen der unbekannten Varianz auch weniger Information vorliegen haben.

Fall 3:

Der gesuchte Parameter der Grundgesamtheit sei die Varianz σ^2. Der Mittelwert μ aus der $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung sei bekannt. Dann berechnet sich ein Konfidenzintervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gemäß der Formel:

Dabei ist ________________ das ________________________________ der ____________________________ und ____________ ist das _____________________ der ________________________________ .

Beispiel 40

Um die Größe eines Regenauffangbeckens besser planen zu können, interessiert sich ein Gärtner für die Varianz σ^2 der Niederschlagsmengen im regenreichsten Monat April. Als Stichprobe liegen ihm die Niederschlagsmengen [in mm] seiner Stadt vom Monat April der letzten 20 Jahre vor.

Es wird angenommen, dass die vorliegenden Messwerte Realisierungen von 20 i.i.d. __________________ -verteilten Zufallsvariablen sind. Für die Summe errechnet sich der Wert ________________________________ .

Aus Tabelle C haben wir: ____________________________________ und ____________________________________ .

Damit ergibt sich folgendes Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $0,95$:

Fall 4:

Genauso wie Fall 3, nur diesmal sei der Mittelwert μ unbekannt. Diese Veränderung bewirkt, dass in der Formel statt der Summe ein Ausdruck mit der Stichprobenvarianz $\bar{S}^2$ auftaucht und die Freiheitsgrade der χ^2-Quantile im Nenner jeweils um eines herabgesetzt werden. In diesem Fall berechnet sich ein Konfidenzintervall für σ^2 zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ gemäß der Formel:

Dabei ist $\chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ das $1-\frac{\alpha}{2}$-Quantil der χ^2_{n-1}-Verteilung und $\chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ ist das $\frac{\alpha}{2}$-Quantil der χ^2_{n-1}-Verteilung.

Beispiel 41 *(Fortsetzung des letzten Beipiels)*

Angenommen, der Mittelwert μ sei unbekannt, und aus den Realisierungen der Stichprobe errechnet sich eine Stichprobenvarianz von $\bar{S}^2 = 51,5$. Aus Tabelle C haben wir: ______________________________ *und* ______________________________ .

Dann ergibt sich insgesamt für das gesuchte Konfidenzintervall:

Diese Konfidenzintervall ist größer als in Fall 3, weil wir hier in Fall 4 durch den unbekannten Mittelwert auch weniger Informationen vorliegen haben.

In den letzten vier Fällen hatten wir stets normalverteilte Zufallsvariablen vorliegen. In manchen Fällen kann mit Hilfe von Grenzwertsätzen (wie z.B. dem zentralen Grenzwertsatz) Konfidenzintervalle näherungsweise bestimmt werden.

Fall 5:

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe i.i.d. verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2. In diesem Fall berechnet sich für große n näherungsweise ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ gemäß der Formel aus dem Fall 1:

dabei ist $\bar{x}$ der Stichprobenmittelwert und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ist das $1 - \frac{\alpha}{2}$-Quantil der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$.

Fall 6:

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe i.i.d. verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2. In diesem Fall berechnet sich für große n näherungsweise ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gemäß der Formel:

dabei ist $\bar{x}$ der Stichprobenmittelwert, S^2 die Varianz und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ist das $1-\frac{\alpha}{2}$-Quantil der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$.

Beispiel 42

Vor einer Wahl möchte ein Meinungsforscher den Anteil p *der Wähler von Partei A unter den Wahlberechtigten ermitteln; d.h. die Grundgesamtheit ist die Menge aller Wahlberechtigten und der gesuchte Parameter* p *ist der Anteil der Wähler von Partei A.*

Dazu befragt er 35 *zufällig ausgewählte Wahlberechtigte nach ihrer Wahlabsicht.* 14 *davon wollen Partei A wählen. Der Meinungsforscher möchte nun wissen, in welchem Bereich* p *liegt zum Konfidenzniveau* 0.95.

Hier ist $X_1, \ldots, X_n$ *eine Stichprobe i.i.d.* ______________ *-verteilter Zufallsvariablen. Dabei sei die Erfolgswahrscheinlichkeit* p *der unbekannte gesuchte Parameter der Grundgesamtheit. Es gilt:*

Da die Varianz ebenfalls unbekannt ist, sind wir im Fall 6. *Sei* k *die Anzahl der Befragten mit der Wahlabsicht Partei A (bzw. die Anzahl der Treffer in der Stichprobe).*

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall:

Hier haben wir:

Dieses Konfidenzintervall ist dem Meinungsforscher zu groß. Er will es genauer wissen und erhöht den Stichprobenumfang. Er befragt nochmal 165 *zufällig ausgewählte Wahlberechtigte nach ihrer Wahlabsicht und findet darunter* 66 *Wähler von Partei A, d.h. insgesamt ist jetzt:*

Dafür berechnet er nochmals ein Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 0.95 *und erhält*

D.h. zu 95% *oder mit einer Wahrscheinlichkeit von* 0.95 *wird Partei A in der Wahl einen Stimmenanteil p zwischen* ____________________ *und* ____________________ *erreichen können. Mit diesem Ergebnis gibt sich der Meinungsforscher zufrieden.*

7 Statistische Tests

7.1 Einführung

Wir kommen nun zum wichtigsten Kapitel in dieser Vorlesung: Statistische Tests.

In den letzten beiden Kapiteln haben wir uns damit beschäftigt, Schätzungen für einen unbekannten Parameter der Grundgesamtheit anhand den Ergebnissen einer Stichprobe zu finden.

Häufig geht es aber in der Statistik auch darum, ________________________________ zu fällen in Situationen, in denen sich eine neue und eine althergebrachte Meinung über einen bestimmten Sachverhalt gegenüberstehen und dem Statistiker die Frage gestellt wird: Welche Meinung ist besser?

Die althergebrachte Meinung nennt man in der Statistik ________________________ __________ und die neue Meinung ____ . Dabei war die althergebrachte Meinung (also die ________________________________) die bisher übliche und gültige solange, bis eine neue, dazu konkurrierende Meinung (die ____) aufgetaucht ist, die es jetzt zu überprüfen gilt.

Die Statistik hat Verfahren entwickelt, welche ________________________________ ____________________ liefern dafür, wann eine althergebrachte Meinung abzulehnen ist und wann nicht. Diese Verfahren heißen Statistische Tests.

Dabei gilt: Im Fall der ______________________ der Nullhypothese (wir sagen auch: Die Nullhypothese wird ______________________) hat sich die Alternativhypothese durchgesetzt;

Im Fall der ________________________________ der Nullhypothese wird die Nullhypothese beibehalten (d.h. sie wird ______________________________) solange, bis eine neue Alternativhypothese auftaucht und der Entscheidungsprozess erneut beginnt.

In diesem Sinne sind die Statistischen Tests nichts anderes als __________________ ______________________ für die ______________________________ !

Beispiel 43

Ein Lehrer behauptet, eine neue Unterrichtsmethode sei besser als die herkömmliche. Hier gilt folgende Einteilung:

____ *: Die neue Unterrichtsmethode ist besser als die alte.*

______________________________ *: Die alte Unterrichtsmethode ist besser oder genausogut wie die neue. Alternative Formulierung: Die beiden Unterrichtsmethoden unterscheiden sich nicht oder die neue Methode ist sogar schlechter als die alte.*

Im letzten Beispiel wird durch die Worte _______________ und ______________________ eine Wertung in eine bestimmte Richtung zum Ausdruck gebracht bei der Formulierung von Nullhypothese und Alternativhypothese. Man spricht dann von einem ______________________________ .

Möchte man in einer neutralen Art und Weise einfach nur überprüfen, ob die neue Methode eine Veränderung bewirkt (egal in welche Richtung) oder nicht, so spricht man von einem ______________________ Test und verwendet folgende Formulierung:

Beispiel 44 *(Zum letzten Beispiel)*

Alternativhypothese: Die neue Unterrichtsmethode unterscheidet sich von der alten (egal in welche Richtung).

Nullhypothese: Es gibt keinen Unterschied zwischen den beiden Unterrichtsmethoden (beide sind gleichgut oder gleichschlecht).

In der Statistischen Testtheorie wird die Nullhypothese mit _____ bezeichnet und die Alternativhypothese mit _____ . Sobald man nun _____ und _____ aufgestellt hat, wird wie folgt weiterverfahren:

Es wird eine Stichprobe gezogen. Dann werden die Stichprobenrealisierungen in einen zu der vorliegenden Test-Situation passenden ____________________ eingesetzt, dessen Verteilung (unter H_0) bekannt ist, und ein ____________________ ausgerechnet.

Ein solcher Schätzer heißt Testgröße oder Prüfgröße und wird mit ________________ bezeichnet. Der zugehörige Schätzwert heißt Wert der Testgröße oder Wert der Prüfgröße und wird mit ____________________ bezeichnet.

Schließlich wird überprüft, ob der errechnete Wert der Testgröße in einen zu der vorliegenden Test-Situation passenden ______________________________

(man sagt auch: ______________________________) fällt und daraufhin folgende Entscheidung getroffen:

Falls ____________________ in den ________________________

____________ fällt, wird H_0 verworfen, ansonsten beibehalten (d.h. nicht verworfen). D.h. im ersten Fall hat sich ____ durchgesetzt und im zweiten Fall ____ .

Wie wir aber in den letzten beiden Kapiteln gelernt haben, unterliegt eine Stichprobe immer Zufallsschwankungen, weil sie die ______________ Situation eines Sachverhalts in der Grundgesamtheit immer nur ________________________ wiedergeben kann. Das bedeutet: Der Statistiker macht bei seiner Entscheidung für oder gegen eine Nullhypothese zwangsläufig Fehler.

Dabei sind zwei verschiedene Fehler möglich:

1.) der sog. ________________ oder ______________________________ ,
nämlich: Die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie richtig ist;

2.) der sog. ________________ oder ______________________________ ,
nämlich: Die Nullhypothese nicht zu verwerfen, obwohl sie falsch ist.

Beispiel 45 *(Zum vorletzten Beispiel)*

Wenn wir hier einen α-Fehler oder einen Fehler erster Art begehen, dann entscheiden wir uns fälschlicherweise ______________ *die Nullhypothese, obwohl sie* ________________ *ist; d.h. es wird fälschlicherweise angenommen, die neue Lehrmethode sei besser als die alte, was z.B. zu teuren und unnötigen Umschulungsmaßnahmen der Lehrer führen könnte.*

Wenn wir hier einen β-Fehler oder einen Fehler zweiter Art begehen, dann entscheiden wir uns fälschlicherweise _______ *die Nullhypothese, obwohl sie* ______________ *ist; d.h. es wird fälschlicherweise angenommen, die neue Lehrmethode sei nicht besser oder sogar schlechter als die alte, was dazu führen könnte, dass die Schüler weiterhin nach der alten Lehrmethode unterrichtet werden anstatt mit der besseren neuen Lehrmethode und eine Chance zu Fortschritt vertan wird.*

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines α-Fehlers bezeichnet man als Irrtumswahrscheinlichkeit. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, nämlich:

Die Irrtumswahrscheinlichkeit spielt in einem Statistischen Test eine große Rolle für den Ablehnungsbereich. Der ist nämlich stets so konzipiert, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner oder gleich einem bestimmten Prozentwert α ist.

Diese obere Grenze der Irrtumswahrcheinlichkeit bezeichnet man als _______________

____________________ oder als ____ .

Die Statistiker sprechen dann davon, dass sie sich aufgrund einer vorliegenden Stichprobe für oder gegen die Ablehnung der Nullhypothese

"auf einem bestimmten ____ "

entscheiden und meinen damit, dass sie ihre Entscheidung (für oder gegen die Ablehnung der Nullhypothese) mit einer bestimmten vorgegebenen Höchst - Irrtumswahrscheinlichkeit treffen.

Natürlich sollte nicht nur die Wahrscheinlichkeit für einen α-Fehler, sondern auch die Wahrscheinlichkeit für einen β-Fehler möglichst klein gehalten werden. Beide zusammen klein zu halten, ist aber leider nicht möglich, denn sie verhalten sich gegenläufig.

Was aber möglich ist: Bei festen kleingehaltenen _____ betrachtet man _____________ , wobei wir hier mit _____ die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines β-Fehlers bezeichnen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, eine Nullhypothese _______________ zu verwerfen, obwohl sie _______________ ist.

$1 - \beta$ ist dann die zugehörige Gegenwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit, eine falsche Nullhypothese auch wirklich zu verwerfen. $1-\beta$ heißt ____________________ oder "power" des Tests. Erwünscht ist eine möglichst große _________________________ (zu einem festen vorgegebenen Signifikanzniveau _____ !)

Es gilt: Die Teststärke wird umso größer, je größer der ________________________

__________________________ ist.

Sowie: Die Teststärke wird umso größer, je kleiner die ______________________ des betrachteten Merkmals in der Grundgesamtheit ist.

Wir fassen zusammen:

Ein Statistischer Test auf einem Signifikanzniveau α ist ein Entscheidungsverfahren für oder gegen die Verwerfung einer aufgestellten Hypothese.

Aus den Realisierungen einer Stichprobe wird der Wert einer Testgröße ermittelt und geprüft, ob er in einen (vorher festgelegten) Ablehnungsbereich fällt oder nicht.

Falls ja, dann wird die Nullhypothese verworfen und die Alternativhypothese hat sich durchgesetzt. Falls nein, dann wird die Nullhypothese nicht verworfen, d.h. sie wird beibehalten.

Dabei ist der Ablehnungsbereich stets so konzipiert, dass eine _________________ Nullhypothese nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich dem Signifikanzniveau α verworfen wird; α wird vorher festgelegt.

Auf diesem vorher festgelegten Signifikanzniveau α sollte der Statistische Test eine möglichst große Teststärke aufweisen (d.h. eine _______________ Nullhypothese sollte mit einer möglichst großen Wahrscheinlichkeit auch wirklich verworfen werden).

7.2 T-Test und Gauß-Test

Wir kommen nun zu konkreten Statistischen Tests:

1.) <u>T-Test</u> (für eine Stichprobe)

Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. ____________________ - verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2.

<u>Fall 1:</u> (zweiseitiger Test)

<u>Fall 2:</u> (einseitiger Test)

<u>Fall 3:</u> (einseitiger Test)

<u>Testgröße:</u> (für alle drei Fälle)

wobei ____ der Stichprobenmittelwert ist

und ____ die Stichprobenvarianz ist.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass ____________ gilt, dann ist ________________________

______________________________ .

Ablenhungsbereiche:

Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: ____

Fall 2: ____

Fall 3: ____ ,

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. (Die Quantile der t_{n-1}−Verteilung finden sich in Tabelle D.)

Beispiel 46

An einer Schule wird ein neuer, junger Sportlehrer eingestellt, der seine Schüler nach einer neuen Trainingsmethode unterrichten will. Ein bereits an der Schule unterrichtender älterer Sportlehrer trainiert seine Schüler schon seit Jahren nach einer alten Trainingsmethode. Beide Sportlehrer möchten ihre unterschiedlichen Trainingsmethoden miteinander vergleichen. Eine Möglichkeit des Vergleichs von neuer und alter Trainingsmethode ist die folgende:

Eine Gruppe von n Schülern wird mit der neuen Trainingsmethode unterrichtet und im Anschluss daran wird ein Leistungsnachweis durchgeführt, dessen Ergebnisse mit den Erfahrungswerten desselben Leistungstests unter der alten Trainingsmethode verglichen werden. Der Leistungstest ist ein Sprint auf einer bestimmten agbesteckten Strecke entlang des Schulgebäudes, die schon immer für Schnelllauftrainings benutzt wurde, und für die genügend Daten aus Wettläufen vergangener Jahre vorliegen.

Wir gehen davon aus, dass sich die Ergebnisse [d.h. Zeit in Sekunden] der n Schüler in diesem Schnelllauf durch i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$*-verteilte Zufallsvariablen* $X_1, \ldots, X_n$ *beschreiben lassen. Wir wissen nun aus Erfahrung, dass der Mittelwert aus dem vergleichbaren Leistungstest unter der alten Trainingsmethode gleich* _____ *ist. Betrachten wir zuerst die* ______________________ *Testsituation. Hier ist die Nullhypothese:* ____________________ *, d.h. die Mittelwerte der Leistungstests beider Trainingsmethoden unterscheiden sich nicht.*
Und die Alternativhypothese ist: ____________________ *, d.h. es gibt einen Unterschied zwischen den Mittelwerten der Leistungstests beider Trainingsmethoden.*

Falls nun der Stichprobenmittelwert _____ *nahe bei* _____ *liegt, so wird* _____ *durch das Stichprobenergebnis unterstützt. In diesem Fall ist die Differenz* _______________ *klein, im Idealfall gleich Null. Falls* _____ *weit weg von* _____ *liegt, d.h. falls die Differenz* _______________ *groß ist, so wird* _______ *durch das Stichprobenergebnis* ____________ *unterstützt.*

Wir berechnen nun den Wert der Testgröße durch Einsetzen der Stichproben-Realisie–rungen $x_1, \ldots, x_n$ in ______ und erhalten mit

genau diese Differenz ________________ dividiert durch eine positive Konstante, d.h. es gilt auch hier: Kleine Werte (nahe bei Null) von $T(x_1, \ldots, x_n)$ unterstützen ______ und große Werte von $T(x_1, \ldots, x_n)$ unterstützen ______________________ .

Wir wissen nun: Falls ________ zutrifft, so ist die Testgröße __________ -verteilt mit Erwartungswert ______ , d.h. es liegt folgende Situation vor:

Die Gesamtfläche unter der Dichtekurve ist 1. *Die beiden eingezeichneten Quantile der __________ -Verteilung schneiden von der Gesamtfläche jeweils ______ Flächeneinheiten ab, d.h. in der Mitte bleibt ein Flächeninhalt von ____________ Flächeneinheiten übrig.*

Das bedeutet: Mit Wahrscheinlichkeit __________ liegt der Wert der Testgröße auf dem mittleren Bereich der x-Achse und mit Wahrscheinlichkeit _________________ auf einen der beiden Randbereichen; immer unter der Annahme, dass die Nullhypothese zutrifft.

Der Ablehnungsbereich ist nun gerade so konzipiert, dass H_0 *verworfen wird, falls der Wert der Testgröße in einen der beiden Randbereiche fällt. Und das bedeutet: Unter der Annahme,* ____________________________ *, wird* H_0 *höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit* α *abgelehnt, was wiederum bedeutet: Das Signifikanzniveau* α *des Tests wird eingehalten.*

Und genau auf diesem Prinzip basieren alle Ablehnungsbereiche eines Statistischen Tests! Sie sind stets so konzipiert, dass das vorgegebene Signifikanzniveau α *eingehalten wird.*

Unser Beispiel konkret mit Zahlen:

$n = 25$ *Schüler erreichen nach der neuen Trainingsmethode ein mittleres Sprintergebnis von* $\bar{x} = 16.3$ *(in Sekunden). Das mittlere Sprintergebnis unter der alten Trainingsmethode sei* $\mu_0 = 15.0$*. Als Stichprobenvarianz berechne sich* $\bar{S}^2 = 64$*. Damit erhalten wir folgenden Wert der Testgröße:*

Aus Tabelle D erhalten wir für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$*:*

Wegen ______________________________________ *fällt der Wert der Testgröße* ____________ *in den Ablehnungsbereich, und somit kann die Nullhypothese auf diesem Signifikanzniveau* ____________ *verworfen werden. D.h. der Test zeigt keine Unterschiede in den mittleren Testergebnissen der beiden Trainingsmethoden.*

Das liegt daran, dass das mittlere Testergebnis $\bar{x}$ der neuen Trainingsmethode zu nahe am mittleren Testergebnis μ_0 der alten Trainingsmethode liegt, d.h. die Differenz $\bar{x} - \mu_0$ ist zu klein und daher fällt $T(x_1, \ldots, x_n)$ nicht in die schraffierten (Ablehnungs-)Randbereiche der Dichtefunktion, sondern bleibt im mittleren Bereich. Das Testergebnis unterstützt damit nicht die Ablehnung von _____ , d.h. die beiden Trainingsmethoden erbringen keine wesentlich abweichenden mittleren Testergebnisse, die eine Verwerfung von _____ rechtfertigen würden.

Wäre das mittlere Testergebnis μ_0 der alten Trainingsmethode gleich 12.8*, so erhielten wir als Wert der Testgröße:*

Wegen ___________________________________ ist in diesem Fall die Abweichung von $\bar{x}$ und μ_0 groß genug, so dass H_0 (auf demselben Signifikanzniveau) verworfen werden kann. D.h. in diesem Fall weist der Test Unterschiede in den mittleren Leistungstestergebnissen der beiden Trainingsmethoden nach.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, wie alte und neue Trainingsmethode aus dem letzten Beispiel miteinander verglichen werden können:
Eine Gruppe von _____ Schülern wird ein Schuljahr lang nach der alten Trainingsmethode unterrichtet und parallel dazu eine Gruppe von _____ Schülern im selben Schuljahr nach der neuen Trainingsmethode. Zum Schuljahresabschluss wird in beiden Gruppen der Sprint durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen.

Das heißt: Hier werden zwei voneinander unabhängige Stichproben gezogen und nicht nur eine wie in unseren vorhergehenden Betrachtungen. Diese neue Stuation benötigt folgenden neuen Statistischen Test: Den t-Test für zwei unabhängige Stichproben.

2.) T-Test (für zwei unabhängige Stichproben)

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Stichproben $X_1, \ldots X_{n_1}$ i.i.d. ________ - verteilter Zufallsvariablen und $Y_1, \ldots Y_{n_2}$ i.i.d. ________________ - verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Erwartungswerten μ_1, μ_2 und unbekannter Varianz σ^2. (Man beachte: σ^2 ist für beide Stichproben derselbe Wert!)

Fall 1: (zweiseitiger Test)	Fall 2: (einseitiger Test)	Fall 3: (einseitiger Test)
$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu_1 < \mu_2$

Testgröße: (für alle drei Fälle)

mit

Stichprobenvarianz der ersten bzw. zweiten Stichprobe sowie ____ Stichprobenmittelwert der ersten und ____ Stichprobenmittelwert der zweiten Stichprobe.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass ____________ gilt, dann ist ______________________________

_____________________________________ .

Ablenhungsbereiche:

Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: ____

Fall 2: ____

Fall 3: ____

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. (Die Quantile der $t_{n_1+n_2-2}$–Verteilung finden sich in Tabelle D.)

$x_1, \ldots, x_n$ sind die Realisierungen der ersten Stichprobe und

$y_1, \ldots, y_n$ sind die Realisierungen der zweiten Stichprobe.

Beispiel 47 *(Fortsetzung vom letzten Beispiel)*

Wir betrachten die Zwei-Stichproben-Situation: _____ Schüler werden mit der alten Trainingsmethode unterrichtet und _____ Schüler mit der neuen. Dann wird in beiden Gruppen ein Leistungstest durchgeführt. Wir gehen davon aus, dass sich die Testergebnisse der Schüler aus der ersten Gruppe durch i.i.d. $N(\mu_1, \sigma^2)$*-verteilte Zufallsvariablen* $X_1, \ldots, X_n$ *beschreiben lassen und die Testergebnisse der Schüler aus der zweiten Gruppe durch* $N(\mu_2, \sigma^2)$*-verteilte Zufallsvariablen* $Y_1, \ldots Y_n$.

Wir betrachten die zweiseitige Testsituation mit folgender Nullhypothese:

________________________ *, d.h. die mittleren Leistungstestergebnisse sind gleich; und mit folgender Alternativhypothese:* ________________________ *, d.h. die mittleren Leistungstestergebnisse sind unterschiedlich.*

Seien konkret in der ersten Gruppe $n_1 = 20$ *Schüler und in der zweiten Gruppe* $n_2 = 22$ *Schüler. In der ersten Gruppe sei* $\bar{x} = 15.7$ *und in der zweiten Gruppe sei* $\bar{y} = 16.9$ *mit Stichprobenvarianzen* $\bar{s}_x^2 = 9.3$ *und* $\bar{s}_y^2 = 8.1$*. Dann errechnet sich für die Testgröße folgender Wert:*

Aus Tabelle D lesen wir ab für $\alpha = 0.05$*:*

Es gilt nun: ______________________________________ *, d.h. der Wert der Testgröße fällt* ____________ *in den Ablehnungsbereich, und somit kann die Nullhypothese auf diesem Signifikanzniveau* ____________ *verworfen werden, was bedeutet, dass kein Unterschied in den mittleren Leistungstestergebnissen der beiden Trainingsmethoden nachgewiesen werden kann.*

Dies liegt daran, dass die mittleren Leistungstestergebnisse _____ und _____ zu dicht beieinander liegen, d.h. die Differenz ____________ ist zu klein, liegt nahe bei Null und kommt daher nicht in die (schraffierten) Randbereiche der zugehörigen Dichtefunktion, wie wir das im letzten Beispiel ausführlich beschrieben haben. Da das Testergebnis keinen Anlass dazu gibt, H_0 *zu verwerfen, wird sie beibehalten.*

Wäre das mittlere Testergebnis in der zweiten Gruppe schlechter, etwa $\bar{y} = 18.1$, *dann hätten wir folgenden Wert für die Testgröße:*

Wegen ____ wird nun _____ verworfen, da der errechnete Wert der Testgröße in den Ablehnungsbereich fällt; d.h. die mittleren Testergebnisse weichen weit genug voneinander ab, so dass _____ nicht mehr aufrechterhalten werden kann, und somit kann ein Unterschied in den mittleren Leistungstestergebnissen beider Trainingsmethoden nachgewiesen werden.

Sowohl beim Ein-Stichproben-t-Test als auch beim Zwei-Stichproben-t-Test sind wir von normalverteilten Zufallsvriablen mit ______________________________ Varianz σ^2 ausgegangen. Falls uns nun die Varianz σ^2 ____________________ ist, dann können wir diese Zusatzinformation nutzen, um statt dem t-Test einen anderen Statistischen Test, den Gauß-Test, zu verwenden, der eine bessere __________________________ aufweist als der t-Test.

3.) <u>Gauß-Test</u> (für eine Stichprobe)

Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \dots X_n$ i.i.d. ____________________ - verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ_0^2.

Fall 1: (zweiseitiger Test)	Fall 2: (einseitiger Test)	Fall 3: (einseitiger Test)
$H_0: \ \mu = \mu_0$	$H_0: \ \mu \leq \mu_0$	$H_0: \ \mu \geq \mu_0$
$H_1: \ \mu \neq \mu_0$	$H_1: \ \mu > \mu_0$	$H_1: \ \mu < \mu_0$

Testgröße: (für alle drei Fälle)

wobei $\bar{X}$ der Stichprobenmittelwert ist.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass ____________ gilt, dann ist __________________________

______________________________ .

Ablenhungsbereiche:

Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: ______________________________

Fall 2: ______________________________

Fall 3: ______________________________ ,

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. Die Quantile der Standardnormal-Verteilung (N(0,1)-Verteilung) finden sich in der z-Tabelle.

Beispiel 48 *(Fortsetzung vom letzten Beispiel)*

Wir betrachten die Ein-Stichproben-Situation. Eine Gruppe von $n = 25$ Schülern werde mit der neuen Trainingsmethode gelehrt und es wird ein mittleres Leistungstestergebnis von $\bar{x} = 16.5$ erreicht.

Ein Erfahrungswert des mittleren Leistungstestergebnisses unter der alten Trainingsmethode sei $\mu_0 = 15.2$. Ferner sei die Varianz $\sigma_0^2 = 8.7$ der Leistungstestergebnisse bekannt.

Wir wollen zweiseitig testen, d.h. die Nullhypothese ist ____________ , und die Alternativhypothese ist ____________ . Als Wert der Testgröße ergibt sich:

Für $\alpha = 0.05$ *lesen wir aus der z-Tabelle das* __________ *-Quantil der* $N(0,1)$*-Verteilung ab:*

Da nun wegen

der Wert der Testgröße in den Ablehnungsbereich fällt, wird die Nullhypothese auf diesem Signifikanzniveau verworfen. Das heißt: Die Nullhypothese, dass sich die mittleren Leistungstestergebnisse von alter und neuer Trainingsmethode nicht unterscheiden, wird abgelehnt.

Falls wir als Signifikanzniveau $\alpha = 0.02$ *wählen, erhalten wir folgendes Quantil aus der z-Tabelle:*

In diesem Fall kann wegen

die Nullhypothese nicht verworfen werden, d.h. auf diesem strengeren Signifikanzniveau fällt der Wert der Testgröße nicht in den Ablehnungsbereich, was wiederum bedeutet: Die Stichprobenergebnisse rechtfertigen auf diesem Signifikanzniveau keine Ablehnung der Nullhypothese.

Wir kommen nun zum Gauß-Test für den Zwei-Stichproben-Fall. Auch hier ist zum t-Test wieder der Unterschied, dass uns diesmal die Varianzen (beide) bekannt sind. (Und diesmal dürfen beide Varianzen auch unterschiedlich sein, im Gegensatz zum 2-Stichproben-t-Test!)

4.) <u>Gauß-Test</u> (für zwei unabhängige Stichproben)

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Stichproben $X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. __________ - verteilter Zufallsvariablen und $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ i.i.d. ____________________ - verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Erwartungswerten μ_1, μ_2 und bekannten Varianzen σ_1^2 und σ_2^2.

<u>Fall 1:</u> (zweiseitiger Test)	<u>Fall 2:</u> (einseitiger Test)	<u>Fall 3:</u> (einseitiger Test)
$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu_1 < \mu_2$

<u>Testgröße:</u> (für alle drei Fälle)

mit $\bar{X}$ Stichprobenmittelwert der ersten und $\bar{Y}$ Stichprobenmittelwert der zweiten Stichprobe.

<u>Verteilung der Testgröße:</u>

Falls wir annehmen, dass ____________ gilt, dann ist ______________________________

_____________________________________ .

Ablenhungsbereiche:

Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: ________________________________

Fall 2: ________________________________

Fall 3: ________________________________

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. Die Quantile der N(0,1)-Verteilung finden sich in der z-Tabelle. $x_1, \ldots, x_n$ sind die Realisierungen der ersten Stichprobe und $y_1, \ldots, y_n$ sind die Realisierungen der zweiten Stichprobe.

Beispiel 49 *(Fortsetzung vom letzten Beispiel)*

Wir betrachten die Zwei-Stichproben-Situation: $n_1 = 20$, $n_2 = 22$ *mit* $\bar{x} = 15.7$, $\bar{y} = 16.9$ *und es seien zusätzlich bekannt:* $\sigma_1^2 = 9.0$ *und* $\sigma_2^2 = 8.0$*. Wir wollen zweiseitig testen (d.h.* ________________ *,* ________________ *) und berechnen dazu folgenden Wert der Testgröße:*

Aus der z-Tabelle finden wir für $\alpha = 0.05$*:*

Wegen ________________________ *kann auf diesem Signifikanzniveau die Nullhypothese* ____________ *verworfen werden, weil der Wert der Testgröße* ____________ *in den Ablehnungsbereich fällt.*

Falls das mittlere zweite Leistungstestergebnis $\bar{y}$ noch schlechter ausfallen würde, etwa $\bar{y} = 17.6$, dann berechnet sich folgender Wert der Testgröße:

Wegen ________________________ *kann hier (auf demselben Signifikanzniveau) die Nullhypothese verworfen werden.*

In den bisher behandelten Zwei-Stichproben-Fällen (sowohl beim t-Test als auch beim Gauß-Test) werden stets zwei voneinander ______________________________ Stichproben vorausgesetzt. In den zugehörigen Beispielen wurden dafür alte und neue Trainingsmethode an zwei verschiedenen Schülergruppen getestet.

Wir wollen jetzt noch den Zwei-Stichproben-t-Test mit zwei voneinander _______ _____________________ (man sagt auch: ____________________________) Stichproben betrachten. Abhängige Stichproben liegen immer dann vor, wenn zwei Merkmale an ein und derselben Gruppe von Untersuchungseinheiten erhoben werden, wenn z.B. ein und dieselbe Schülergruppe erst mit der alten und dann mit der neuen Trainingsmethode gelehrt wird und beidesmal jeweils im Anschluss daran der Leistungstest durchgeführt wird.

Im Gegensatz zum Ein-Stichproben-t-Test liegt uns also hier nicht ein Erfahrungswert _____ des mittleren Leistungstestergebnisses der alten Trainingsmethode aus der Vergangenheit vor, sondern ein konkret erhobenes mittleres Leistungstestergebnis _____ der alten Trainingsmethode.

Und dafür gibt es folgenden Statistischen Test:

5.) <u>T-Test</u> (für zwei abhängige Stichproben)

Gegeben seien zwei voneinander abhängige Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu_1, \sigma_1^2)$-verteilter Zufallsvariablen und $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilter Zufallsvariablen mit unbekannten Erwartungswerten μ_1, μ_2 und unbekannten Varianzen σ_1^2 und σ_2^2. Ferner seien die Differenzen ____________________ für $i = 1, \ldots, n$) alles normalverteilte Zufallsvariablen.

(Merkhilfe: $X_1, \ldots, X_n$ sind die Stichprobenergebnisse "vorher" und $Y_1, \ldots Y_n$ sind die Stichprobenergebnisse "nachher".)

<u>Fall 1:</u> (zweiseitiger Test)	<u>Fall 2:</u> (einseitiger Test)	<u>Fall 3:</u> (einseitiger Test)
$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$	$H_0: \mu_1 \geq \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu_1 < \mu_2$

<u>Testgröße:</u> (für alle drei Fälle)

wobei $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ die beiden Stichprobenmittelwerte sind und

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass $\mu_1 = \mu_2$, dann ist $T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$ $t_{(n-1)}$-verteilt.

Ablenhungsbereiche: Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: $|T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)|$

Fall 2: $T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$

Fall 3: $T(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist.

Beispiel 50 *(Fortsetzung von den letzten Beispielen)*

Wir betrachten die Zwei-Stichproben-Situation mit zwei abhängigen Stichproben: $n = 24$ *Schüler werden zuerst mit der alten und dann mit der neuen Trainingsmethode gelehrt. Das mittlere Leistungstestergebnis nach der alten Methode sei* $\bar{x} = 14.1$ *und nach der neuen Methode sei* $\bar{y} = 17.2$*. Ferner errechne sich aus den Realisierungen beider Stichproben der Wert* $\bar{D}^2 = 49$*. Damit ergibt sich für die Testgröße:*

Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ *lesen wir in Tabelle D ab:*

Wegen ________________________ *kann hier die Nullhypothese verworfen werden, d.h. die Stichprobenergebnisse rechtfertigen die Alternativhypothese, dass es einen Unterschied zwischen den beiden Trainingsmethoden gibt.*

7.3 Chi-Quadrat-Streuungstest und F-Test

Alle bisher besprochenen Statistischen Tests sind sog. Tests über die Mittelwerte; denn ihre Nullhypothesen handeln vom Vergleich entweder zweier Mittelwerte oder eines Mittelwertes mit einem konstanten Wert.

In verschiedenen realen Sachverhalten ist es aber sinnvoller, nicht die Mittelwerte zu testen, sondern die Varianzen, da es in der zugrundeliegenden Fragestellung um die Streuung von Messwerten geht. Insbesondere wenn die Streuung recht groß wird, besitzt dann der Mittelwert nur noch wenig Aussagekraft. In solchen Fällen sind Nullhypothesen über Varianzen erheblich sinnvoller. (Allerdings kommen diese Fälle auch seltener vor als Fälle, in denen Tests über die Mittelwerte angesagt sind.)

In diesem Zusammenhang behandeln wir hier zwei Tests: Einmal den Chi-Quadrat-Streuungstest für den Ein-Stichproben-Fall und einmal den F-Test für den Fall zweier voneinander unabhängiger Stichproben.

6.) <u>Chi-Quadrat-Streuungstest</u> (für eine Stichprobe)

Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(\mu; \sigma^2)$- verteilter Zufallsvariablen

mit ______________________________ Erwartungswert μ

und ______________________________ Varianz σ^2.

<u>Fall 1:</u> (zweiseitiger Test)	<u>Fall 2:</u> (einseitiger Test)	<u>Fall 3:</u> (einseitiger Test)
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

Testgröße: (für alle drei Fälle)

wobei

die Stichprobenvarianz ist und $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ der Stichprobenmittelwert.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass ____________ gilt, dann ist ________________________

____________________________ .

Ablenhungsbereiche:

Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: $T(x_1, \ldots, x_n)$ ________________ oder $T(x_1, \ldots, x_n)$ ________________

Fall 2: $T(x_1, \ldots, x_n)$

Fall 3: $T(x_1, \ldots, x_n)$

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. Die Quantile der χ^2_{n-1}–Verteilung finden sich in Tabelle C.

Beispiel 51 *Ein Möbelhersteller möchte eine neue Regalserie produzieren. Um den richtigen Abstand der Regalböden voneinander planen zu können, besorgt sich der Möbelhersteller die Höhenmaße von* ____________ *Buchtypen. Aus diesen Maßen errechnet er eine Stichprobenvarianz von* ____________________ .

Mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest soll nun überprüft werden, ob die Varianz _____ *der Buchhöhen den Wert* _________________________ *, der beim Bau der alten Regalserie zugrundegelegt wurde, überschreitet oder nicht; d.h. ob bei der neuen Regalserie ein größerer Abstand der Regalböden voneinander eingeplant werden soll als bei der alten Regalserie oder nicht.*

Getestet werden soll also die Nullhypothese ___________________________________ *gegen die Alternativhypothese* ___________________________________ *. Wir legen ein Signifikanzniveau von* _______________ *zugrunde.*

Für die Testgröße berechnet sich ein Wert von

Aus Tabelle C haben wir: ____ *. Wegen* _____________________________________ *kann die Nullhypothese selbst auf diesem großzügigen Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden, d.h. es ist nicht nötig, bei der neuen Regalserie einen größeren Abstand einzuplanen als bei der alten.*

7.) F-Test (für zwei unabhängige Stichproben)

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Stichproben $X_1, \ldots, X_{n_1}$ i.i.d. $N(\mu_1; \sigma_1^2)$ verteilter Zufallsvariablen und $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. $N(\mu_2; \sigma_2^2)$-verteilter Zufallsvariablen mit ____________________ Erwartungswerten μ_1, μ_2 und ____________________ Varianzen σ_1^2, σ_2^2.

Fall 1: (zweiseitiger Test)	Fall 2: (einseitiger Test)	Fall 3: (einseitiger Test)
$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$
$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Testgröße: (für alle drei Fälle)

wobei

die Stichprobenvarianz der ersten Stichprobe ist und

die Stichprobenvarianz der Zweiten. Sowie $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ und $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass __________ gilt, dann ist ______________________________

______________________________ .

Ablenhungsbereiche: Ablehnung von H_0, falls

Fall 1: $T(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$ oder $T(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$

Fall 2: $T(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$

Fall 3: $T(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2})$

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist. $n_1 - 1$ sind die Zählerfreiheitsgrade und $n_2 - 1$ sind die Nennerfreiheitsgrade. (Die Quantile der F_{n_1-1,n_2-1}–Verteilung finden sich in Tabelle E.)

Hinweis:

Ein F-Test auf Gleichheit der Varianzen (also Fall 1) wird oft einem t-Test für zwei unabhängige Stichproben vorgeschaltet, um zu überprüfen, ob die Voraussetzung gleicher Varianzen in beiden Stichproben abzulehnen ist oder nicht. Statistik-Software-Computer-Programme machen dies z.T. automatisch und geben ggf. eine Warnmeldung heraus, falls die Annahme gleicher Varianzen durch den F-Test nicht bestätigt wird.

BEISPIEL 52 *Ein Möbelhersteller möchte eine neue Regalserie mit modernem Design herstellen, die eine alte Regalserie mit altmodischem Design ablösen soll. Um den richtigen Abstand der Regalböden voneinander planen zu können, liegen dem Möbelhersteller für die alte Regalserie die Höhenmaße von* ____________ *damals auf dem Markt befindlichen unterschiedlichen Buchtypen vor mit Stichprobenvarianz* ____________ *und für die neue Regalserie liegen dem Möbelhersteller*

Höhenmaße von ____________ heute auf dem Markt befindlichen unterschiedlichen Buchtypen vor mit Stichprobenvarianz ________________ .

Beim ersten Durchsehen seiner Daten glaubt der Möberhersteller bei den Höhenmaßen der neuen Buchtypen eine kleinere Varianz zu erkennen als bei den Höhenmaßen der alten Buchtypen; jedoch die Mittelwerte von alten und neuen Höhenmaßen fallen ziemlich gleich aus. Die Fragestellung lautet nun: Kann bei der modernen Regalserie ein kleinerer Abstand der Regalböden voneinander eingeplant werden als bei der alten Regalserie?

Dazu soll mit einem $F - Test$ *zum Signifikanzniveau __________ geprüft werden, ob die Varianz der neuen Buchhöhen kleiner ist als die Varianz der alten Buchhöhen oder nicht.*

Es soll also die Nullhypothese ____________________ gegen die Alternativhypothese ____________________ getestet werden (Fall ____). Wir berechnen dazu den Wert der Testgröße aus den beiden Stichproben und erhalten:

Aus Tabelle E: ___________________________ .

Da nun gilt: ________________________ , fällte der Wert der Testgröße __________ in den Ablehnungsbereich, d.h. H_0 *kann auf diesem Signifikanzniveau __________ verworfen werden; was ____________ spricht, bei der neuen Regalserie einen kleineren Abstand einzuplanen als bei der alten.*

7.4 U-Test von Mann-Whitney und Wilcoxon-Test

In allen bisher behandelten Statistischen Tests wurde stets vorausgesetzt, dass die Zufallsvariablen, welche die Stichprobendaten (oder die Beobachtungsdaten) beschreiben, normalverteilt sind. In vielen Situationen kann man aber nicht davon ausgehen!

Oftmals sind die zugrundeliegenden Stichprobendaten (oder Beobachtungsdaten) noch nicht einmal verhältnis-skaliert, sondern lediglich intervallskaliert oder sogar nur ordinal skaliert.

In der Statistik wurden dafür spezielle Tests entwickelt, die sog. ____________________

____________________________ oder _____________________________________

Tests. Wir werden im folgenden zwei solcher Tests vorstellen:

8.) <u>U-Test von Mann-Whitney</u> (für zwei unabhängige Stichproben)

Dieser Test eignet sich für mindestens ordinalskalierte Beobachtungsdaten, welche wir uns reell codiert vorstellen.

Gegeben seien zwei voneinander unabhängige Stichproben $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen gemäß einer Verteilungsfunktion __________________ , und $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d. Zufallsvariablen gemäß einer (verschobenen) Verteilungsfunktion

____________________________________ , für ein ___________ .

Getestet wird dann:

H_0 : ____

H_1 : ____

(Merkhilfe: H_0 : Gleiche Wirkung, H_1 : unterschiedliche Wirkung)

<u>Testgröße:</u>

wobei

Um den Wert der Testgröße zu ermitteln, verfahren wir folgendermaßen: Wir sortieren alle Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}$ aus den beiden Stichproben der Größe nach und vergeben Rangplätze von _____ für den kleinsten Stichprobenwert bis _______________ für den größten Stichprobenwert. Dann betrachten wir jeden einzelnen Stichprobenwert _____ aus der _____ Stichprobe und zählen, wie viele Stichprobenwerte _____ aus der _____ Stichprobe einen echt größeren Rangplatz haben als _____ .

Dies ergibt die Anzahl _________________ der sog. Rangplatzüberschreitungen für jedes einzelne _____ aus der _____ Stichprobe. Alle diese Rangplatzüberschreitungen aufsummiert ergibt den Wert der Testgröße, nämlich:

Dazu ein Beispiel: Es liegen uns folgende Stichprobenrealisierungen aus den beiden Stichproben vor, denen wir ihrer Größe nach Rangplätze zuweisen. In der letzten Zeile schließlich stehen bei jedem Stichprobenwert der ersten Stichprobe die Anzahl der Stichprobenwerte aus der zweiten Stichprobe, die einen größeren Rangplatz aufweisen:

Diese Zahlen der letzten Zeile aufsummiert ergeben den Wert der Testgröße:

____

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass __________ gilt, und falls entweder _______________ oder _______________ (also bei mindestens einer hinreichend großen Stichprobe),

dann ist ____ näherungsweise

____ mit ___________________________

und ____ .

Ablenhungsbereich: Ablehnung von H_0, falls

wobei α das (vorher festgelegte) Signifikanzniveau des Tests ist und das $z_{1-\alpha/2}-$Quantil der Standardnormalverteilung in der z-Tabelle zu finden ist.

Vorliegen von Bindungen:

Je nachdem, wie die beiden Stichproben ausfallen, kann es vorkommen, dass unter den Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}$ Werte ____________________ vorkommen, d.h. die Rangplätze können nicht mehr ____________________ vergeben werden. In diesem Fall spricht man vom Vorliegen von sog. Bindungen und wir verfahren wie folgt:

Wir sortieren alle Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}$ der Größe nach, nur dass jetzt die mehrfach vorkommenden Werte nebeneinander stehen. Dann vergeben wir Rangplätze an die einzeln vorkommenden Werte ____________________ , und an die mehrfach vorkommenden Werte wird jedem der ____________________ der für diese Werte normalerweise zu vergebenden Rangplätze zugewiesen.

Dazu ein Beispiel: Seien 1; 1; 2; 3; 3; 3; 4 die bereits der Größe nach sortierten Stichprobenrealisierungen aus den beiden Stichproben. Dann werden ihnen folgende Ränge zugeordnet:

Die Testgröße beim Vorliegen von Bindungen ist wie bisher die Summe der Rangplatzüberschreitungen:

wobei wieder

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass __________ gilt, und falls entweder $n_1 > 10$ oder $n_2 > 10$ (also bei mindestens einer hinreichend großen Stichprobe), dann ist $U(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ näherungsweise __________________ -verteilt mit ____________________________ und

wobei _____ = Anzahl der verschiedenen Werte, die jeweils mehrfach vorkommen, und zwar mit Häufigkeiten ____________________ .

Zu unserem letzten Beispiel:

Hier ist __________ und ______________________________ (Erklärung: Es gibt zwei verschiedene Stichprobenwerte, die mehrfach vorkommen, nämlich die _____ und die _____ . Also ist __________ . _____ kommt zweimal vor, also ist ____________ . _____ kommt dreimal vor, also ist ____________).

Für die Summe berechnet sich damit:

Ablehnungsbereich beim Vorliegen von Bindungen:

Ablehnung von H_0, falls

wobei α wieder das Signifikanzniveau des Tests ist und das $z_{1-\alpha/2}$–Quantil in der z-Tabelle zu finden ist.

Bemerkung: In beiden Fällen (sowohl ohne als auch mit Vorliegen von Bindungen) kann man sagen, dass die Testgröße den Grad der Durchmischung der Stichprobenwerte beider Stichproben misst. Je schlechter durchmischt die Werte beider Stichproben sind, desto extremer wird der Wert der Testgröße ausfallen, d.h. die Abweichung von μ_u wird entweder in die eine oder in die andere Richtung sehr groß, und desto eher wird es zu einer Verwerfung der Nullhypothese kommen. Je besser durchmischt die Werte beider Stichproben sind, desto mehr nähert sich der Wert der Testgröße μ_u an, und desto unwahrscheinlicher wird eine Verwerfung der Nullhypothese.

Beispiel 53

(In den Stichproben zu diesem Beispiel kommen keine Bindungen vor; diesen Fall werden wir in den Übungen behandeln.)

Ein Arzt gibt 12 Patienten, die unter Schlafstörungen leiden, für eine Nacht Medikament A und 14 anderen Patienten, die ebenfalls unter Schlafstörungen leiden, gibt er für eine Nacht Medikament B.

Medikament A		*Medikament B*	
Schlafdauer	*Rangplatz*	*Schlafdauer*	*Rangplatz*
3 : 55	8	9 : 25	26
4 : 08	10	3 : 37	6
8 : 11	23	5 : 09	13
2 : 46	5	1 : 18	1
1 : 43	2	2 : 25	3
7 : 23	21	4 : 53	12
6 : 14	17	3 : 59	9
9 : 01	25	7 : 13	20
5 : 13	14	4 : 18	11
8 : 33	24	6 : 45	19
7 : 29	22	3 : 48	7
5 : 38	16	2 : 37	4
		6 : 41	18
		5 : 27	15

Der Arzt vermutet eine unterschiedliche Wirkungsweise beider Medikamente und möchte dies mit Hilfe eines U-Tests von Mann-Whitney untersuchen. Dazu lässt er sich von allen Patienten aufschreiben, wielange sie in der einen Nacht geschlafen haben. Es liegen ihm folgende Werte (mit zugehörigen Rangplätzen) in Std.:Min. vor.

Wir müssen nun den Wert der Testgröße, d.h. die Summe der Rangplatzüberschreitungen, ermitteln. Dazu betrachten wir jeden einzelnen Wert aus dem linken Tabellenteil, also jede einzelne Schlafenszeit unter dem Einfluss von Medikament A, merken uns ihren Rangplatz, und zählen, wieviele Werte aus dem rechten Tabellenteil (unter Medikament B) einen größeren Rangplatz haben.

Für den ersten Wert ____________ *mit Rangplatz* _____ *haben z.B.* _____ *Werte unter Medikament B einen größeren Rangplatz, für den zweiten Wert* ____________ *mit Rangplatz* _______ *haben* _____ *Werte unter B einen größeren Rangplatz, usw..*

Alle diese Rangplatzüberschreitungen aufsummiert ergibt den Wert der Testgröße:

Wegen ___________________________________ *kann bei Anwendung des U-Tests von Mann-Whitney auf diese Testsituation die Nullhypothese* _________________ *verworfen werden, d.h. die Daten geben keinen Anlass zur Vermutung des Arztes, dass die Medikamente* _____________________________________ *Wirkung haben.*

9.) **<u>Wilcoxon-Test (oder auch: Vorzeichen-Rang-Test)</u>**

(für zwei abhängige Stichproben)

Dieser Test eignet sich für mindestens intervallskalierte Beobachtungsdaten.

Gegeben seien zwei abhängige Stichproben i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (das sind die Stichprobenergebnisse ____________________) und i.i.d. Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ (das sind die Stichprobenergebnisse ____________________).

Dann sind auch die Differenzen _________________________ für _______________ i.i.d. Zufallsvariablen. (Merkhilfe: Die Differenzen kann man sich wie die Veränderungen von vorher zu nachher vorstellen.)

Getestet wird dann:

H_0 : ____ für alle $x \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, d.h. die Differenzen $D_1, \ldots, D_n$ (also die "Veränderungen") sind symmetrisch um Null verteilt

H_1 : Die Differenzen $D_1, \ldots, D_n$ sind nicht symmetrisch um Null verteilt, d.h. es gibt ein $x \geq 0$ und ein $i \in \{1, ..., n\}$ mit ____ .

(Merkhilfe: H_0 : Keine Veränderung zwischen vorher und nachher,
H_1 : Es hat sich etwas verändert)

<u>Testgröße:</u>

wobei _____ der Rang vom Absolutbetrag der Differenz _______ ist. Aufsummiert werden nur diejenigen Ränge, die zu echt positiven Differenzen gehören.

Den Wert der Testgröße ermitteln wir folgendermaßen:

Wir bilden die Differenzen ______________________________ , und ordnen die Absolutbeträge ________ der Differenzen der Größe nach. Dann vergeben wir Rangplätze von _____ für den kleinsten Absolutbetrag bis _____ für den größten Absolutbetrag. Schließlich addieren wir diejenigen Ränge auf, die zu echt positiven Differenzen _____ gehören, für die also __________ gilt. Diese Summe ergibt den Wert der Testgröße.

<u>Verteilung der Testgröße:</u>

Falls wir annehmen, dass H_0 gilt, und falls $n \geq 20$ (also bei großen Stichproben), dann ist ______________________________ näherungsweise ______________________________ mit ______________________________ und ______________________________ .

<u>Ablenhungsbereich:</u>

Ablehnung von H_0, falls

wobei α das Signifikanzniveau des Tests ist und das $z_{1-\alpha/2}-$Quantil der Standardnormalverteilung in der z-Tabelle zu finden ist.

Vorliegen von Bindungen:

Je nachdem, wie die beiden Stichproben ausfallen, kann es vorkommen, dass unter den Differenzen ____ Werte mehrfach vorkommen, d.h. die Rangplätze können nicht mehr eindeutig vergeben werden. Ebenso kann es vorkommen, dass ein oder mehrere Differenzen gleich Null sind. In diesen Fällen spricht man vom Vorliegen sog. "Bindungen" und wir verfahren wie folgt:

Wir sortieren die Absolutbeträge der Differenzen ___________________________ wie bisher der Größe nach, nur dass jetzt die mehrfach vorkommenden Werte nebeneinander stehen und auch Nullen (einfach oder mehrfach) vorkommen können. Dann vergeben wir Rangplätze an die einzelnen Werte wie gewohnt. Dabei werden die Nulldifferenzen als "kleinste" Differenzen berücksichtigt. An die mehrfachen Werte wird jedem der Durchschnitt der für diese Werte normalerweise zu vergebenden Rangplätze zugewiesen.

Beispiel dazu: Sei n=8 und

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 2; \quad y_3 = 2; \quad y_4 = 3; \quad y_5 = 0; \quad y_6 = 2; \quad y_7 = 3; \quad y_8 = -1$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = 0; \quad x_6 = 1; \quad x_7 = 1; \quad x_8 = 3$$

Jedoch gehören nur Rangplätze mit Pfeilen zu echt positiven Differenzen (die anderen Rangplätze gehören zu negativen Differenzen oder zu Null-Differenzen).

Die Testgröße ist wie bisher die Summe derjeniger Rangplätze, die zu echt positiven Differenzen gehören; hier: ______________________________ .

Also:

wobei ______ der Rang des Absolutbetrages der Differenz ______ ist.

<u>Verteilung der Testgröße:</u> Falls wir annehmen, dass H_0 gilt, und falls $n \geq 20$ (also bei großen Stichproben), dann ist ______________________________

näherungsweise ______________________________ mit

und

wobei k = Anzahl der verschiedenen Differenzen-Absolutbeträge $\neq 0$, die jeweils mehrfach vorkommen, und zwar mit Häufigkeiten ________________ ;

t_0 = Häufigkeit der vorkommenden Null-Differenzen ____________________ .

Zu unserem letzten Beispiel:

Hier ist __________ (weil ____ Nulldifferenzen vorkommen) und __________ (weil ____ verschiedene Absolutbeträge $\neq 0$ mehrfach vorkommen, nämlich die ____ mit Häufigkeit ____________ und die ____ mit Häufigkeit ____________).

Somit ist

Ablehnungsbereich bei Vorliegen von Bindungen:

Ablehnung von H_0, falls

wobei α wieder das Signifikanzniveau des Tests ist und das $z_{1-\alpha/2}$-Quantil aus der z-Tabelle.

Beispiel 54 *(Zum letzten Beispiel)*

Als "vorher-nachher-Problem" formuliert:

Ein Arzt gibt 20 Patienten, die unter Schlafstörungen leiden, für eine Nacht Medikament A, und lässt sich von allen Patienten aufschreiben, wie lange sie in der einen Nacht (unter Einwirkung von Medikament A) geschlafen haben.

Zusätzlich lässt er sich von allen Patienten berichten, wie lange sie in der Nacht davor (ohne Medikament A) geschlafen haben. Der Arzt vermutet eine Wirkung von Medikament A, und möchte dies mit einem Wilcoxon-Test untersuchen. Es liegen ihm folgende Werte vor (in Std. : Min.), siehe Tabelle auf der nächsten Seite.

$x_i =$ ______________________________

$y_i =$ ______________________________

$r_i =$ _______________

x_i	y_i	$d_i = y_i - x_i$	$\|d_i\|$	r_i
3:55	5:02	1:07	1:07	8
4:08	6:27	2:19	2:19	14
2:46	8:24	5:38	5:38	20
8:11	5:03	-3:08	3:08	18
7:23	6:25	-0.58	0.58	7
1:43	2:58	1:15	1:15	10
9:01	6:31	-2.30	2:30	16
5:13	8:37	3:24	3:24	19
5:38	6:15	0:37	0:37	3
7:29	6:45	-0:44	0:44	4
8:33	8:18	-0:15	0:15	1
3:37	6:38	3:01	3:01	17
5:09	6:51	1:42	1:42	12
1:18	2:13	0:55	0:55	6
7:13	6:21	-0:52	0:52	5
2:25	4:38	2:13	2:13	13
9:25	6:59	-2:26	2.26	15
4:53	6:03	1:10	1:10	9
3:59	5:20	1:21	1:21	11
4:15	4:47	0:32	0:32	2

Die Testgröße ______________________________ *ist nun die Summe aller Rangplätze* _____ *, die zu positiven Differenzen* ______________ *gehören, also:* ______________________________________ .

Für den Ablehnungsbereich müssen wir noch _______ *und* _______ *berechnen (für* $n = 20$*):* ______________________________ *und*

______________________________________ .

Damit:

Aus der z-Tabelle (für $\alpha = 0,1$*):*

Da ______________________________ *, kann* H_0 *auf diesem (schon recht großzügigen) Signifikanzniveau* ______________________________ *werden, was bedeutet, dass eine Auswirkung von Medikament A auf die Schlafenszeit der Patienten* ____________ *nachgewiesen werden kann.*

7.5 Kolmogorow-Smirnow-Test, Chi-Quadrat-Anpassungstest und Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

Die Statistischen Tests, welche wir in den Abschnitten 7.2 und 7.3 behandelt haben, benötigen als Voraussetzung, dass die Stichprobendaten einer normalverteilten Grundgesamtheit angehören.

In vielen Fällen kann man aus der Erfahrung heraus sagen, dass diese Voraussetzung gegeben ist. In manchen Fällen jedoch bestehen Zweifel, und in diesen Fällen gibt es die Möglichkeit, zuerst einen sog. ________________________________ durchzuführen. Ein ________________________________ oder auch ________________ ________________________________ (= ________________________________ ________________________________) dient zur Überprüfung der Nullhypothese, ob das beobachtete Merkmal eine bestimmte Verteilung, z.B. die Normalverteilung, besitzt oder nicht; d.h. ob sich die Stichprobendaten hinreichend gut an eine gewünschte Verteilung "anpassen".

Wir werden hier zwei solcher Tests kennenlernen:

Den ____ und

den ____ .

10.) Kolmogorow-Smirnow-Test (für eine Stichprobe)

Gegeben sei eine Stichprobe i.i.d. Zufallsvariablen$X_1, \ldots, X_n$ aus einer Grundgesamtheit mit einer ________________________ stetigen Verteilungsfunktion F. Ferner sei F_0 eine ______________________ stetige Verteilungsfunktion, z.B. der Normalverteilung $N(\mu; \sigma^2)$ mit bekannten Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2.

Testgröße:

Für die Testgröße berechnen wir zuerst die empirische Verteilungsfunktion F_n aus den Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_n$ wie folgt:

mit $m(x)$ gleich der Anzahl der Stichprobenrealisierungen, die x nicht übertreffen.

Beispiel: Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n=6 wie folgt:

$$x_1 = 2.5; \qquad x_2 = -1; \qquad x_3 = 1; \qquad x_4 = 2.5; \qquad x_5 = 2; \qquad x_6 = 3$$

Diese Stichprobe besitzt folgende empirische Verteilungsfunktion:

Sei nun F_0 die Verteilungsfunktion der bekannten $N(1.5; 2)$-Verteilung. Wir betrachten die Graphen der empirischen Verteilungsfunktion F_6 (= durchgezogene Linie) und der bekannten Verteilungsfunktion F_0(= gestrichelte Linie):

Die **Testgröße** ist nun der maximale Abstand von bekannter Verteilungsfunktion F_0 und empirischer Verteilungsfunktion F_n. (Dieser wird immer an den Sprungstellen von F_n angenommen. Also in $x_{(i)}, i = 1, \ldots n$.) In Formeln:

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass __________ gilt, dann ist $T(X_1, \ldots, X_n)$ verteilt gemäß der sog. ____ -Verteilung. (Für n > 40 können die Quantile der asymptotischen Verteilung genommen werden, siehe Tabelle M.)

Ablehnungsbereiche: Ablehnung von H_0, falls

wobei $k_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Kolmogorow-Smirnow-Verteilung ist.

Weitaus häufiger als der Kolmogorow-Smirnow-Test wird der folgende Anpassungstest verwendet:

11.) <u>Chi-Quadrat-Anpassungstest</u> (für eine Stichprobe)

Dieser Test eignet sich bereits für diskrete Verteilungen; kann aber auch bei stetigen Verteilungen angewendet werden.

Gegeben sei eine Stichprobe i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ aus einer Grundgesamtheit mit einer ________________________ Verteilungsfunktion F (F kann stetig oder diskret sein, beides ist möglich).

Ferner sei F_0 eine ________________ (diskrete oder stetige) Verteilungsfunktion.

<u>Testgröße:</u>

Zuerst wird die reelle Achse in k sich ausschließende Intervalle eingeteilt (wobei $k \leq n$), und dann wird gezählt, wieviele Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_n$ in jedes Intervall fallen; diese Anzahlen werden mit $n_1, \ldots, n_k$ bezeichnet.

Sei nun p_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zufallsvariable Y, welche gemäß der Verteilungsfunktion F_0 verteilt ist, einen Wert in der i-ten Klasse annimmt, d.h.

________________________________ . Die Testgröße ist:

Dabei kann man ______ auch interpretieren als die erwartete Anzahl von Stichprobenrealisierungen im ______ Intervall für $i = 1, \ldots, k$.

Verteilung der Testgröße:

Falls wir annehmen, dass ________ gilt, dann ist $T(X_1, \ldots, X_n)$ näherungsweise

______________________________ .

Ablehnungsbereich:

Ablehnung von _____ , falls

wobei $\chi^2_{k-1;1-\alpha}$ das $(1-\alpha$-Quantil der χ^2-Verteilung mit $k-1$ Freiheitsgraden ist und in Tabelle C abgelesen werden kann.

Beispiel 55

Mit Hilfe des χ^2-Anpassungstests soll untersucht werden, ob ein vorliegender Würfel "fair" oder "verfälscht" ist. Dazu wird der Würfel 100 mal geworfen und die geworfenen Augenzahlen notiert:

Augenzahl	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Anzahl der zugehörigen Würfe	*20*	*17*	*15*	*19*	*13*	*16*

Wir haben also $k = 6$ Klassen vorliegen . Wir testen mit folgender Nullhypothese:

Das heißt:

(Jede Augenzahl bei einem fairen Würfel kommt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ vor.)

Damit ergibt sich als Wert der Testgröße:

Für ________________ *lesen wir in Tabelle C ab:*

d.h. ____ *, und*

damit kann H_0 ______________ *verworfen werden, d.h. die Daten sprechen*

______________ *gegen einen fairen Würfel!*

Hinweis:

Im Gegensatz zu allen Tests, die wir in 7.2 bis 7.4 vorgestellt haben, steht in den beiden hier vorgestellten Anpassungstests die erwünschte Situation in der ____________ ________________________, nicht in der ____________________________________ ____________! D.h. hier ist es günstig, wenn H_0 ______________ verworfen werden kann!

Zuguterletzt wollen wir noch den sog. ______________________________

______________ behandeln, der die Nullhypothese testet, ob zwei Merkmale in derselben Grundgesamtheit ________________________ voneinander sind.

Anwendungen dieses Tests finden sich in vielen Fragestellungen, z.B.:

Beispiel 56

(a) *Gibt es einen Zusammenhang zwischen Körpergröße und Körpergewicht gleichalter Erwachsener?*

(b) *Sind Augenfarbe und Haarfarbe voneinander unabhängige Merkmale?*

(c) *Beeinflusst das Einkommen von Wahlberechtigten ihre Wahlentscheidung?*

(d) *Ist die Blutgruppenzugehörigkeit geschlechtsabhängig?*

12.) Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest (für zwei abhängige Stichproben)

Gegeben seien zwei voneinander ____________________ Stichproben

$X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen des Merkmals X und

$Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d.Zufallsvariablen des Merkmals Y.

Testgröße:

Beide reellen Achsen, sowohl die x-Achse als auch die y-Achse, werden in sich gegenseitig ausschließende Intervalle eingeteilt, und zwar die x-Achse in __________ Intervalle und die y-Achse in __________ Intervalle. Dann wird gezählt, wieviele Stichprobenrealisierungen $x_1, \ldots, x_n$ von Merkmal X in die k Intervalle der x-Achse fallen und wieviele Stichprobenrealisierungen $y_1, \ldots, y_n$ von Merkmal Y in die l Intervalle der y-Achse fallen. Diese Anzahlen werden in eine Kontingenztafel eingetragen und wie folgt bezeichnet:

Mit diesen Bezeichnungen aus der Kontingenztafel ist die Testgröße:

Dabei kann man ____________ interpretieren als die erwartete Häufigkeit in Intervall i von Merkmal X und (gleichzeitig) in Intervall j von Merkmal Y (unter H_0).

<u>Verteilung der Testgröße:</u>

Falls wir annehmen, dass _____ und _____ ______________________________ sind, dann ist die Testgröße näherungsweise _________________________ -verteilt.

<u>Ablehnungsbereiche:</u>

Ablehnung von H_0, falls

wobei α das Signifikanzniveau des Tests ist und ______________________________ das ______________________________ der ____ .

<u>Anmerkung:</u>

Der χ^2 -Unabhängigkeitstest ist geeignet für __________ Skalenart der Merkmale X und Y.

Beispiel 57 *(Zu Teil (c) des letzten Beispiels)*

Es soll untersucht werden, ob ein Zusammenhang zwischen Einkommen und Wählerverhalten besteht. Dazu werden 1000 *zufällig ausgewählte Bundesbürger nach ihrem Einkommen (Ausprägungen: hoch, mittel, niedrigi) und der Partei (Ausprägungen: A, B, C, andere) befragt, der sie bei der nächsten Bundestagswahl ihre Stimme geben wollen. Es ergibt sich folgende Kontingenztafel für die absoluten Häufigkeiten:*

Für die Testgröße wurde noch in jedem Feld der Kontingenztafel, d.h. für jedes Indexpaar $i \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $j \in \{1, \ldots, l\}$ *die Werte* ______________ *berechnet.*

Mit diesen Werten berechnet sich die Testgröße wie folgt:

Für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ *lesen wir in Tabelle C ab:*

Wegen ____ *lehnen wir die Nullhypothese* H_0 : *"Einkommen und Wahlverhalten sind unabhängig" ab, d.h. wir haben mit dem* χ^2*-Unabhängigkeitstest einen Zusammenhang zwischen Einkommen und Wahlverhalten nachgewiesen.*

Übersicht Statistische Tests OHNE Normalverteilungsannahme:

8 Zusammenfassung

Statistische Erhebung= ____________________ , _________________________

oder __________________

Merkmale= ____

Merkmalsausprägungen, Messwerte, Skalenwerte= ______________

Skalenarten:

(1) _______________________________

(2) _______________________________

(3) _______________________________

(4) _______________________________

Häufigkeiten: (k=Zählindex)

f(k)= ____

%(k)= ____

f_{kum}(k)= ____

$\%_{kum}$(k)= ____

graphische Darstellungsmöglichkeiten:

(1) ______________________________

(2) ___________________________________

(3) ____

Messreihe: ______________________________

geordnete Messreihe:

___________________________________ mit ____

Statistische Kennwerte für Messreihen:

(1) Modalwert:

(2) Median:

(3) Arithmetisches Mittel:

(4) Varianz:

Alternative Berechnungsformel für die Varianz:

(5) Standardabweichung:

zweidimensionale (bivariate) Messreihen:

(1) ______________________________

(2) ______________________________

Zufallsexperiment:

(1) Elementarereignis:

(2) Ergebnismenge:

(3) Ereignis:

(4) Vereinigung zweier Ereignisse:

(5) Durchschnitt zweier Ereignisse:

(6) Gegenereignis von A:

(7) unmögliches Ereignis:

(8) sicheres Ereignis:

(9) A, B disjunkte oder unvereinbare Ereignisse:

(10) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A:

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten:

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Laplace-Experiment:

Abzählformel für Laplace-Experimente:

Abzählregeln für Laplace-Experimente:

(1) Für die Anzahl aller möglichen Ausgänge $|\Omega|$:

(1.1) einstufiges Laplace-Experiment:

(1.2) mehrstufiges Laplace-Experiment:

(2) Für die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen:

(3) Für die Anz. aller Mögl., k Objekte aus n zu ziehen ohne Zurücklegen:

(3.1) mit Reihenfolge:

(3.2) ohne Reihenfolge (d.h. mit einem Griff):

(3.3) ohne Reihenfolge (mit mehreren Griffen nacheinander):

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

Zwei Ereignisse A, B sind unabhängig, falls gilt:

Formel von der Totalen Wahrscheinlichkeit:

wobei $A_1,\ A_2$ die beiden möglichen Ausgänge der 1. Stufe und B ein Ausgang der 2. Stufe bei einem zweistufigen Zufallsexperiment sind, bei dem die Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe abhängig sind von den Wahrscheinlichkeiten der 1. Stufe.

Formel von Bayes:

Zufallsvariable: = Funktion, die jedem __________ eine __________________________

oder einen ____ zuordnet.

__________ heisst _______________________________ von _____ .

(1) Eine Zufallsvariable heisst **diskret**, falls ____________________________________

(2) Eine Zufallsvariable heisst **stetig**, falls ____________________

(1.1) **Wahrscheinlichkeitsfunktion** für diskrete Zufallsvariablen:

(2.1) **Wahrscheinlichkeitsdichte** für stetige Zufallsvariablen:

(3) **Verteilungsfunktion** $F(x)$ einer Zufallsvariablen:

(4) **p-Quantil**

(5) **Erwartungswert** μ einer Zufallsvariablen:

(6) **Varianz** σ^2 einer Zufallsvariablen:

(7) **Streuung** σ einer Zufallsvariablen:

(8) **Binomialverteilung:**

(9) **Poisson-Verteilung:**

(10) **Normalverteilung:**

Der Graph von f heißt ____________________________ .

(11) **Standardnormalverteilung:**

(12) **Standardisierte Zufallsvariable Z:**

(13) **i.i.d.:**

(14) Quantile der ____________________________ aus __________________

(15) Quantile der ____________________________ aus __________________

(16) Quantile der ______________________________ aus __________________

(17) Quantile der ________________________________ aus __________________

Parameterschätzung:

(1) **Grundgesamtheit:** __________________________

(2) **Stichprobe:** ___________________________________

(3) **Parameter** wie z.B. ____ oder ____ sind aus der Grundgesamtheit.

(4) **Schätzer:**

häufig verwendete Schätzer:

(4.1) **Stichprobenmittelwert:**

(4.2) **Stichprobenvarianz:**

(4.3) **Stichprobenstandardabweichung:**

Intervallschätzung:

Ein **Konfidenzintervall** zum **Konfidenzniveau p** ist

Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen.

Dann gibt es 4 Fälle:

Fall 1: gesucht: _____ , bekannt: _____

Fall 2: gesucht: _____ , unbekannt: _____

Fall 3: gesucht: _____ , bekannt: _____

Fall 4: gesucht: _____ , unbekannt: _____

Fall 5: Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $B(1, \theta)$-verteilte Zufallsvariablen.

Gesucht ist die Erfolgswahrscheinlichkeit θ.

Konfidenzintervallgrenzen ("+"=obere Grenze, "-"=untere Grenze):

Statistische Tests:

Folgende Begriffe müssen verstanden sein: Nullhypothese, Alternativhypothese, einseitiger Test, zweiseitiger Test, Testgröße, Wert der Testgröße, Ablehnungsbereich, α-Fehler, β-Fehler, Signifikanzniveau, Teststärke.

Übersicht Statistische Tests MIT Normalverteilungsannahmen:

Übersicht Statistische Tests OHNE Normalverteilungsannahmen: