Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften

9. Übung

Lösungsvorschlag

Hinweis: Bestandteil der heutigen Übung ist auch die Nachbereitung der Klausur vom 17.12.2007.

Gruppenübung

G 31 Um die Genauigkeit eines neu entwickelten Gerätes zur Messung von Weglängen im Gelände zu kontrollieren, wurde eine Strecke von genau 1000 m zehnmal vermessen.

Messung	1	2	3	4	5
Messwert $[m]$	998.0	1001.0	1003.0	1000.5	999.0
Messung	6	7	8	9	10
Messwert $[m]$	997.5	1000.0	999.5	996.0	998.5

Nun soll getestet werden, ob das gerät im Mittel die korrekte Entfernung angibt.
Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit Sie einen der Ihnen bekannten Tests durchführen können? Wie lauten die Null- und die Alternativhypothese?

Nehmen Sie an, die Voraussetzungen sind erfüllt und testen Sie nun Ihre Nullhypothese zum Niveau $\alpha = 5\%$

(a) bei unbekannter Varianz,

(b) unter der Voraussetzung, dass $\sigma^2 = 4$ gilt.

Damit die uns bekannten Tests angewendet werden können, muß angenommen werden, daß die Daten iid. normalverteilt sind.

a)

Geeignetes Testverfahren: *t-Test*
Begründung: Die Varianz σ^2 ist unbekannt, und man sucht ein Testverfahren zum Vergleich von μ mit dem vorgegebenen Zahlenwert ($\mu_0 = 1000$).

Nullhypothese: $H_0 : \mu = 1000,$ *Alternative* $H_1 : \mu \neq 1000$

Testgröße:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\bar{S}^2_X / n}}$$

Realisierung der Testgröße:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{10} &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i \\ &= \frac{1}{10}(998 + 1001 + \ldots + 998.5) = \frac{9993}{10} = 999.3, \\ \bar{s}^2 &= \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \frac{10}{9}\bar{x}_{10}^2 \\ &= \frac{1}{9}\cdot 9995065 - \frac{9}{10}(999.3)^2 = 3.9, \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$T(x_1, \ldots, x_{10}) = \frac{\bar{x}_{10} - \mu_0}{\sqrt{\bar{s}^2_x / 10}} = \frac{999.3 - 1000}{\sqrt{3.9/10}} \approx -1.121 \ .$$

<u>*Kritischer Bereich:*</u> *Wir lehnen H_0 ab, falls gilt:*
$T(x_1,\ldots,x_n) \leq -t_{n-1;1-\alpha/2}$ *oder* $T(x_1,\ldots,x_n) \geq t_{n-1;1-\alpha/2}$

<u>*Entscheidung:*</u> *Wegen* $-2.26 = t_{9;0.025} < T(x_1,\ldots,x_{10}) \approx -1.121 < 2.26 = t_{9;0.975}$ *wird die Nullhypothese* **nicht abgelehnt**.

b)

<u>*Geeignetes Testverfahren:*</u> *Gauß-Test*
Begründung: Entgegen der Aufgabenstellung in a) ist die Varianz σ^2 nunmehr bekannt.

<u>*Nullhypothese:*</u> $H_0 : \mu = 1000$, *Alternative* $H_1 : \mu \neq 1000$

<u>*Testgröße:*</u>
$$T(X_1,\ldots,X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

<u>*Realisierung der Testgröße:*</u>
$$T(x_1,\ldots,x_{10}) = \frac{\bar{x}_{10} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/10}} = \frac{999.3 - 1000}{\sqrt{4/10}} = -\frac{\sqrt{10}}{2} \approx -1.107\ .$$

<u>*Kritischer Bereich:*</u> *Wir lehnen H_0 ab, falls gilt:*
$T(x_1,\ldots,x_n) \leq z_{\alpha/2}$ *oder* $T(x_1,\ldots,x_n) \geq z_{1-\alpha/2}$

<u>*Entscheidung:*</u> *Wegen* $-1.96 = z_{0.025} < T(x_1,\ldots,x_9) \approx -1.107 < 1.96 = z_{0.95}$ *wird die Nullhypothese* **nicht abgelehnt**.

G 32 Formulieren Sie für die folgende Testsituation Nullhypothese und Alternativhypothese einmal für einen einseitigen Test und einmal für einen zweiseitigen Test und beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten, wie ein α–Fehler und ein β–Fehler in der Situation aussehen und was sie für Konsequenzen haben können:
Das Sportinstitut einer Hochschule möchte die Auswirkungen eines 3-monatigen-Spezial-Fitness-Programms auf das Körpergewicht der Teilnehmer untersuchen.

einseitiger Test
H_0 : *Das Körpergewicht der Teilnehmer ist nach dem 3-monatigen Fitneßprogramm gleichgeblieben oder angestiegen.*
H_1 : *Das Körpergewicht der Teilnehmer ist nach dem 3-monatigen Fitneßprogramm gesunken.*

zweiseitiger Test
H_0 : *Das Körpergewicht der Teilnehmer ist nach dem 3-monatigen Fitneßprogramm unverändert geblieben.*
H_1 : *Das Körpergewicht der Teilnehmer hat sich nach dem 3-monatigen Fitneßprogramm verändert.*

Ein α-Fehler liegt vor, wenn die Nullhypothese H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist.
Im einseitigen Test bedeutet dies, daß fälschlicherweise angenommen wird, das Fitneßprogramm reduziere das Körpergewicht. Eine mögliche Konsequenz wäre: übergewichtige Teilnehmer verlassen sich allein auf das Programm und behalten ihre ungesunden Ernährungsgewohnheiten.

Ein β-Fehler liegt vor, wenn die Nullhypothese falsch ist, aber nicht verworfen wird. Im zweiseitigen Test bedeutet dies, daß man fälschlicherweise annimmt, das Fitneßprogramm habe keinerlei Auswirkungen auf das Körpergewicht. Mögliche Folge: Teilnehmer nehmen das Programm nicht ernst genug.

Hausübung

H 17 Eine neue Sorte von Reagenzgläsern soll mit einer gebräuchlichen Sorte, bei der die mittlere Schmelztemperatur 745 Grad Celsius beträgt, verglichen werden. Bei der neuen Sorte von Reagenzgläsern wurden folgende Temperaturwerte ermittelt (in Grad Celsius):

785 650 730 820 671 790 611 715

828 742 631 750 653 621 720 675

Es wird angenommen, dass die Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ eine Realisierung von unabhängigen identisch $N(\mu, 4900)$ - verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{16}$ sind.
Durch Anwendung eines geeigneten Tests zum Niveau $\alpha = 0.05$ überprüfe man

a) die Hypothese $H_0 : \mu = 745$ gegen $H_1 : \mu \neq 745$,

b) die Hypothese $H_0 : \mu \geq 745$ gegen $H_1 : \mu < 745$.

a) *Geeignetes Testverfahren:* *Gauß-Test*
Begründung: Die Varianz σ^2 wird als bekannt vorausgesetzt, und man sucht ein Testverfahren zum Vergleich von μ mit dem vorgegebenen Zahlenwert ($\mu_0 = 745$).

Nullhypothese: $H_0 : \mu = 745$, *Alternative* $H_1 : \mu \neq 745$

Testgröße:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

Realisierung der Testgröße:

$$T(x_1, \ldots, x_{16}) = \frac{\bar{x}_{(16)} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/16}} = \frac{712 - 745}{\sqrt{4900/16}} \approx -1.8857\ .$$

Kritischer Bereich: *Wir lehnen H_0 ab, falls gilt:*
$|T(x_1, \ldots, x_n)| > z_{1-\alpha/2}$.

Entscheidung: *Wegen* $|T(x_1, \ldots, x_{16})| \approx 1.8857 \leq 1.96 = z_{0.975}$ *wird die Nullhypothese* **nicht abgelehnt**.

b) Da sich gegenüber a) lediglich die Nullhypothese ändert, bleiben das Testverfahren, die Testgröße und deren Realisierung gleich.

Nullhypothese: $H_0 : \mu \geq 745$, *Alternative* $H_1 : \mu < 745$

Kritischer Bereich: *Wir lehnen H_0 ab, falls gilt:*
$T(x_1, \ldots, x_n) < z_\alpha$.

Entscheidung: *Wegen* $T(x_1, \ldots, x_{16}) \approx -1.8857 < -1.64 = z_{0.05}$ *wird die Nullhypothese* **abgelehnt**.

H 18 Formulieren Sie für die folgende Testsituation Nullhypothese und Alternativhypothese einmal für einen einseitigen Test und einmal für einen zweiseitigen Test und beschreiben Sie in Ihren eigenen Worten, wie ein α–Fehler und ein β–Fehler in der Situation aussehen und was sie für Konsequenzen haben können:
Ein Hobbygärtner möchte untersuchen, ob regelmäßige Gaben eines Spezial-Düngers Auswirkungen auf das Längenwachstum seiner Bohnen hat.

einseitiger Test

H_0 : *Das Längenwachstum der Bohnen ist trotz Spezialdünger gleichgeblieben oder hat abgenommen.*
H_1 : *Das Längenwachstum der Bohnen hat durch Spezialdünger zugenommen.*

zweiseitiger Test

H_0 : *Das Längenwachstum der Bohnen ist trotz Spezialdünger gleichgeblieben.*
H_1 : *Das Längenwachstum der Bohnen hat sich durch den Spezialdünger verändert.*

Ein α-Fehler liegt vor, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist. Im einseitigen Test bedeutet dies, daß angenommen wird, der Einsatz von Spezialdünger hat einen positiven Effekt auf das Längenwachstum. Mögliche Folge: Es wird unnütz Geld in die Anschaffung des Düngers investiert.

Ein β-Fehler liegt vor, wenn die Nullhypothese nicht verworfen wird, obwohl sie falsch ist. Im zweiseitigen Test bedeutet dies, daß man annimmt, der Dünger habe keine Auswirkung auf das Längenwachstum. Mögliche Auswirkung: Der Gärtner verschenkt Ernteertrag, da er den Dünger nicht einsetzt.