

Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften

8. Übung Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 26 Bei 40 Teilnehmern eines Eignungstests wurde die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben bestimmt. Es ergab sich folgende bereits geordnete Messreihe:

4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 17

- (a) Geben Sie den Modalwert an, falls er eindeutig ist.
- (b) Bestimmen Sie den Median.
- (c) Berechnen Sie das 0.8-Quantil.
- (d) Berechnen Sie die Standardabweichung.

(a) *Der Messwert 10 kommt mit der höchsten absoluten Häufigkeit 7 vor und ist eindeutig. D.h. $Mo = 10$*

(b) $Md = \frac{9+10}{2} = 9.5$

(c) $p = 0.8, n = 40, n \cdot p = 32 \Rightarrow x_{0.8} = x_{(32)} = 12.$

(d) $\bar{x} = 9.3, s^2 = 12.06, s \approx 3.4728.$

G 27 (a) In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können 6 Bücher nebeneinander im Regal stehen?

(b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in einem Multiple-Choice-Test mit 7 Fragen, zu denen jeweils 5 verschiedene Antworten zur Auswahl stehen, pro Frage eine Antwort anzukreuzen?

(c) In einem Restaurant stehen 18 verschiedene Menüs zur Auswahl. 4 Freunde möchten dort essen gehen und sie verabreden, dass jeder ein anderes Menü bestellt. Wie viele verschiedene Menüzusammenstellungen sind möglich?

(d) Eine Studentin will ihrer Freundin 3 neue CD's schenken. Im CD-Laden gibt es passend zum Musikgeschmack der Freundin 16 verschiedene CD's. Auf wieviele Arten kann die Studentin ihre Auswahl treffen?

(a) *Man stelle sich dazu das Bücherregal eingeterilt in 6 Plätze vor. Für die Besetzung des 1. Platzes hat man 6 Bücher zur Auswahl, also 6 Möglichkeiten. Für den 2. Platzes hat man nur noch 5 Möglichkeiten, usw. Insgesamt $6 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1 = 6! = 720$ Möglichkeiten.*

(b) *Problem so auffassen, dass 7 mal genau eine Antwort aus $\{a, b, c, d, e\}$ gewählt wird. Wir ziehen also 7 mal aus einer Menge von 5 Elementen, wobei Wiederholungen erlaubt sind und die Anordnung eine Rolle spielt. Also $5^7 = 78125$ Möglichkeiten.*

(c) *Die erste Person hat 18 Menüs zur Auswahl. Die zweite hat noch 17 Möglichkeiten. Die dritte 16 und die vierte Person 15. Insgesamt $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73440$ Möglichkeiten.*

(d) *Aus einer Menge von 16 Elementen werden 3 gezogen. Dabei spielt die Annordnung keine Rolle. Wiederholungen sind nicht erlaubt. Also $\binom{16}{3} = 560$ Möglichkeiten.*

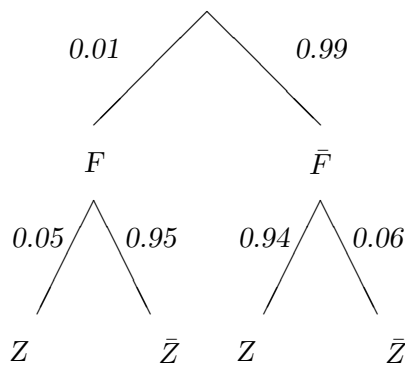
G 28 In einem Brieftauben-Zuchtverein tritt bei 1% aller Brieftauben eine anlagebedingte Fehlfunktion des Gehirns auf, die zur zeitweisen Orientierungslosigkeit bei Botenflügen führt. Auf einem Flugwettbewerb dieses Vereins erreichen 95% aller "anlagebedingt orientierungslosen" Brieftauben nicht das Ziel, aber auch 6% aller gesunden Brieftauben erreichen nicht das Ziel.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Brieftaube, die im Wettbewerb das Ziel nicht erreicht hat, auch wirklich anlagebedingt orientierungslos?

Wir definieren zunächst die relevanten Ereignisse:

F : Die Taube hat eine anlagenbedingte Fehlfunktion.

Z : Die Taube erreicht das Ziel.



Formel von Bayes:

$$P(F|\bar{Z}) = \frac{P(\bar{Z}|F) \cdot P(F)}{P(\bar{Z})} = \frac{P(\bar{Z}|F) \cdot P(F)}{P(\bar{Z}|F) \cdot P(F) + P(\bar{Z}|\bar{F}) \cdot P(\bar{F})} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.06 \cdot 0.99} \approx 0.1379$$

G 29 Angenommen, ein Meteorologe hat bei jeder Tageswettervorhersage eine Trefferwahrscheinlichkeit von 0,8. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der richtigen Tageswettervorhersagen des Meteorologen in einer Woche.

- (a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable X ?
- (b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl der richtigen Tageswettervorhersagen des Meteorologen in einer Woche.
- (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht der Meteorologe in einer Woche mindestens 5 richtige Tageswettervorhersagen?
- (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht der Meteorologe in einer Woche keine einzige richtige Tageswettervorhersage?

(a) $X \sim B(7; 0.8)$.

(b) $EX = n \cdot p = 7 \cdot 0.8 = 5.6$.

(c) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = \binom{7}{5} \cdot 0.8^5 \cdot 0.2^2 + \binom{7}{6} \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^1 + \binom{7}{7} \cdot 0.8^7 \cdot 0.2^0 \approx 0.852$

(d) $P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0.8^0 \cdot 0.2^7 = 0.0000128$

G 30 Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_X(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } x \in \{1; 2; 3; 4\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei Y eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_Y(x) := \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } 0.5 \leq x \leq 4.5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen und Skizzieren Sie jeweils die Verteilungsfunktion von X und Y .
 (b) Bestimmen Sie jeweils das $\frac{1}{3}$ -Quantil von X und Y .
 (c) Berechnen Sie $P(2 \leq X \leq 3)$ und $P(2 \leq Y \leq 3)$.
 (d) Bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert und die Varianz von X und Y .

(a)

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{4} & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{4} & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für } 4 \leq x. \end{cases} \quad F_Y(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0.5 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} & \text{für } 0.5 \leq x \leq 4.5 \\ 1 & \text{für } 4.5 \leq x. \end{cases}$$

(b) Es gilt $F_X(2) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Also ist 2 das $\frac{1}{3}$ -Quantil.

$$F_Y(x_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{4}x_{\frac{1}{3}} - \frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

$$x_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)4 = \frac{11}{6}$$

(c)

$$P(2 \leq X \leq 3) = f_X(2) + f_X(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \leq Y \leq 3) = F_Y(3) - F_Y(2) = \frac{1}{4}3 - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}2 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

(d)

$$EX = \sum_{i=1}^4 i f_X(i) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^4 i^2 f_X(i) - (EX)^2 = \frac{1}{4}(1 + 4 + 9 + 16) - (2.5)^2 = 1.25$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) dx = \int_{0.5}^{4.5} \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{0.5}^{4.5} = 2.5$$

$$Var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Y(x) dx - (EX)^2 = \int_{0.5}^{4.5} \frac{1}{4} x^2 dx - (2.5)^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{0.5}^{4.5} - (2.5)^2 = \frac{4}{3}$$

Hausübung

H 15 Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\theta+1} & \text{für } x \in \{0; 1; \dots; \theta\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei der Parameter $\theta \in \mathbb{N}$ unbekannt ist.

Zeigen Sie, dass das doppelte arithmetische Mittel $2\bar{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

Für die Erwartungstreue ist $E(2\bar{X}) = \theta$ zu zeigen.

$$E(2\bar{X}) = 2E(X_1) = 2 \sum_{i \in W(X_1)} i f(i) = 2 \sum_{i=0}^{\theta} i \frac{1}{\theta+1} = \frac{2}{\theta+1} \sum_{i=0}^{\theta} i = \frac{2}{\theta+1} \frac{\theta(\theta+1)}{2} = \theta$$

H 16 In einer medizinischen Studie soll untersucht werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine bestimmte Stoffwechselkrankheit bei Neugeborenen auftritt. Es bezeichne θ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes mit dieser Stoffwechselkrankheit auf die Welt kommt.

- (a) In einer Klinik wird unter n Neugeborenen die Anzahl der Kinder ermittelt, die mit dieser Stoffwechselkrankheit auf die Welt kommen. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen X , welche die Anzahl der kranken Kinder beschreibt.
- (b) Berechnen Sie näherungsweise die Intervallgrenzen eines Konfidenzintervalls für θ zum Konfidenzniveau 0,95, wenn unter $n=1600$ Neugeborenen genau $k=24$ kranke Kinder gezählt werden.

(a) $X \sim B(n, \theta)$.

(b) Hier ist X_1, \dots, X_n eine Stichprobe i.i.d $B(1, \theta)$ -verteilter Zufallsvariablen mit $EX_i = \theta$ und $Var(X_i) = \theta(1 - \theta)$. Somit sind ergibt sich ein Konfidenzintervall:

$$\approx \left[\frac{k}{n} - \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; \frac{k}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Es ist $n = 1600$, $k = 24$, $1 - \alpha = 0.95$ und somit $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-0.025} = z_{0.975} = 1.960$.

$$\approx \left[\frac{24}{1600} - \sqrt{\frac{1}{1600} \cdot \frac{24}{1600} \cdot \frac{1576}{1600}} 1.960 ; \frac{24}{1600} + \sqrt{\frac{1}{1600} \cdot \frac{24}{1600} \cdot \frac{1576}{1600}} 1.960 \right] \approx [0.009 ; 0.021]$$