Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften

4. Übung

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 12 Prüfen Sie jeweils, ob die angegebene Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Skizzieren Sie gegebenenfalls die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X, deren Verteilung durch $P(\{a < X \leq b\}) = P_X((a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$, für $a < b$, gegeben ist.

a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1/8 & \text{für } 1 \leq x \leq 3, \\ 1/2 & \text{für } 5 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3\pi/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \left(4\sqrt{|x|}\right)^{-1} & \text{für } -1 \leq x < 0 \text{ oder } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

a) *Hier ist offensichtlich die Bedingung $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$ für $x \in [0,1[$ verletzt. Deshalb ist f keine Wahrscheinlichkeitsdichte.*

b) *Wegen*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3 \neq 1$$

ist f keine Wahrscheinlichkeitsdichte.

c) *Hier sind alle Anforderungen an eine Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt, speziell*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot(0-(-1)) + \frac{1}{8}\cdot(3-1) + \frac{1}{2}\cdot(6-5) = 1.$$

Verteilungsfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 1/4(x+1) & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1/4 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 1/8(x+1) & \text{für } 1 \leq x \leq 3, \\ 1/2 & \text{für } 3 < x < 5, \\ 1/2(x-4) & \text{für } 5 \leq x \leq 6, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) *Wegen $\sin(x) < 0$ für $x \in]\pi, 3\pi/2[$ ist f keine Wahrscheinlichkeitsdichte.*

e) *Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da ferner*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{4\sqrt{-x}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1\end{aligned}$$

gilt, ist f eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Verteilungsfunktion lautet:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-x}\right) & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{x}\right) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

G 13 Fünf Musikgruppen geben demnächst in ihrer Stadt Konzerte. Die Eintrittskarten sind unterschiedlich teuer. Gruppe $G_1 = 20$ Euro, $G_2 = 40$ Euro, $G_3 = 50$ Euro, $G_4 = 36$ Euro und $G_5 = 28$ Euro. Sie können sich nicht entscheiden und beschließen zwei zufällig ausgesuchte Konzerte zu besuchen und entsprechende Karten zu kaufen.

a) Beschreiben Sie den Ergebnisraum.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereigniss an.

c) Geben Sie den Wertebereich der folgenden Zufallsvariablen an:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{nichtnegative Preisdifferenz zwischen den beiden Karten in Euro} \\ X_2 &= \text{arithmetische Mittel der beiden Karten in Euro} \\ X_3 &= \text{Preis der teureren Karte in Euro.} \end{aligned}$$

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Verteilungsfunktionen der drei Zufallsvariablen.

e) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_3.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_3.

a) $\Omega = \{\, \{G_1, G_2\}, \{G_1, G_3\}, \{G_1, G_4\}, \{G_1, G_5\}, \{G_2, G_3\}, \{G_2, G_4\}, \{G_2, G_5\}, \{G_3, G_4\}, \{(G_3, G_5\}, \{G_4, G_5\} \,\}$

b) $P(\{G_i, G_j\}) = \frac{1}{10}$. *(Wobei $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $i \neq j$.)*

c)

$$\begin{aligned} W(X_1) &:= \{4, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22, 30\} \\ W(X_2) &:= \{24, 28, 30, 32, 34, 35, 38, 39, 43, 45\} \\ W(X_3) &:= \{28, 36, 40, 50\} \end{aligned}$$

d)

$$f_{X_1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{10} & \textit{für } x \in W(X_1) \setminus \{8\} \\ \frac{2}{10} & \textit{für } x = 8 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad f_{X_2}(x) := \begin{cases} \frac{1}{10} & \textit{für } x \in W(X_1) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$F_{X_1}(x) := \begin{cases} 0 & \textit{für } -\infty < x < 4 \\ \frac{1}{10} & \textit{für } 4 \le x < 8 \\ \frac{3}{10} & \textit{für } 8 \le x < 10 \\ \frac{4}{10} & \textit{für } 10 \le x < 12 \\ \frac{5}{10} & \textit{für } 12 \le x < 14 \\ \frac{6}{10} & \textit{für } 14 \le x < 16 \\ \frac{7}{10} & \textit{für } 16 \le x < 20 \\ \frac{8}{10} & \textit{für } 20 \le x < 22 \\ \frac{9}{10} & \textit{für } 22 \le x < 30 \\ 1 & \textit{für } 30 \le x < \infty \end{cases} \qquad F_{X_2}(x) := \begin{cases} 0 & \textit{für } -\infty < x < 24 \\ \frac{1}{10} & \textit{für } 24 \le x < 28 \\ \frac{2}{10} & \textit{für } 28 \le x < 30 \\ \frac{3}{10} & \textit{für } 30 \le x < 32 \\ \frac{4}{10} & \textit{für } 32 \le x < 34 \\ \frac{5}{10} & \textit{für } 34 \le x < 35 \\ \frac{6}{10} & \textit{für } 35 \le x < 38 \\ \frac{7}{10} & \textit{für } 38 \le x < 39 \\ \frac{8}{10} & \textit{für } 39 \le x < 43 \\ \frac{9}{10} & \textit{für } 43 \le x < 45 \\ 1 & \textit{für } 45 \le x < \infty \end{cases}$$

$$f_{X_3}(x) := \begin{cases} \frac{1}{10} & \textit{für } x = 28 \\ \frac{2}{10} & \textit{für } x = 36 \\ \frac{3}{10} & \textit{für } x = 40 \\ \frac{4}{10} & \textit{für } x = 50 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad F_{X_3}(x) := \begin{cases} 0 & \textit{für } -\infty < x < 28 \\ \frac{1}{10} & \textit{für } 28 \le x < 36 \\ \frac{3}{10} & \textit{für } 36 \le x < 40 \\ \frac{6}{10} & \textit{für } 40 \le x < 50 \\ 1 & \textit{für } 50 \le x < \infty. \end{cases}$$

f)

$$E(X_3) = \sum_{x \in W(X_3)} x f_{X_3}(x) = 28 \cdot \frac{1}{10} + 36 \cdot \frac{2}{10} + 40 \cdot \frac{3}{10} + 50 \cdot \frac{4}{10} = 42$$

$$Var(X_3) = \sum_{x \in W(X_3)} (x - E(X_3))^2 f_{X_3}(x) = 14^2 \cdot \frac{1}{10} + 6^2 \cdot \frac{2}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 8^2 \cdot \frac{4}{10} = 53,6$$

G 14 Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Ableitung und Stammfunktion:

$$f(x) := 2x^4 + 3x^3 - x - \ln(5)$$
$$g(x) := 5^x$$
$$h(x) := x \ln(x)$$

$$f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 1 \qquad F(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \ln(5)x$$

$$g(x) = 5^x = e^{\ln(5^x)} = e^{\ln(5)x}$$

$$g'(x) = \ln(5)e^{\ln(5)x} = \ln(5)5^x \qquad G(x) = \frac{1}{\ln(5)}e^{\ln(5)x} = \frac{1}{\ln(5)}5^x$$

$$h'(x) = \ln(x) + 1$$

$$\int x \ln(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x)\Big| - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

.

Hausübung

H 7 Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie jeweils die Funktion.

a) $F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2(x+5)) & \text{für } x > -5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 0.5 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \pi/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

c) $F_3(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{3x^2+5} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

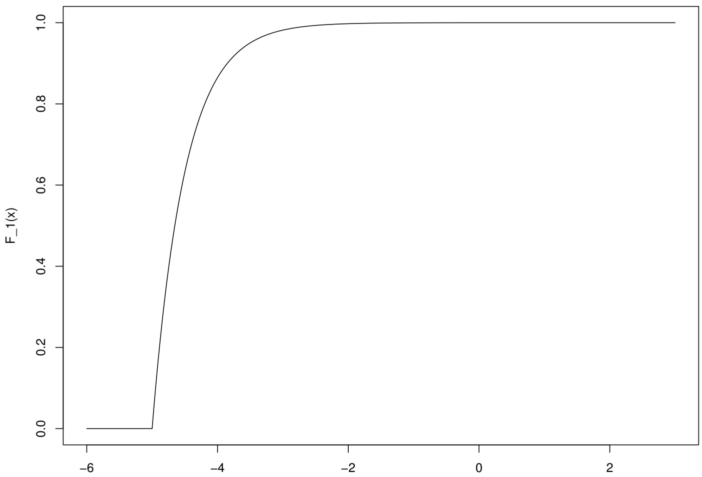
a) F_1 erfüllt alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, denn:
(i) F_1 ist wegen

$$F_1'(x) = 2 \cdot \exp(-2(x+5)) > 0$$

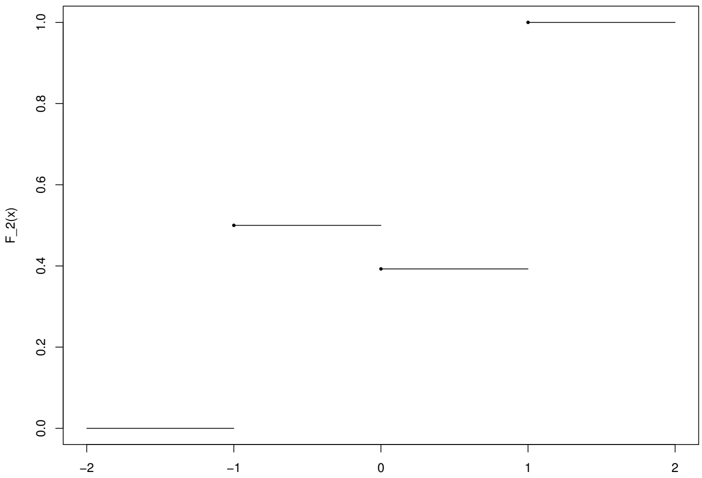
monoton wachsend.
(ii) F_1 ist stetig (beachte $F_1(-5) = 0$) und damit insbesondere rechtsseitig stetig.
(iii) Nach Funktionsvorschrift von F_1 gilt sowohl $\lim\limits_{x \to -\infty} F_1(x) = 0$ als auch

$$\lim_{x\to\infty} F_1(x) = 1 - \lim_{x\to\infty} \exp(-2(x+5)) = 1 - 0 = 1.$$

Skizze:



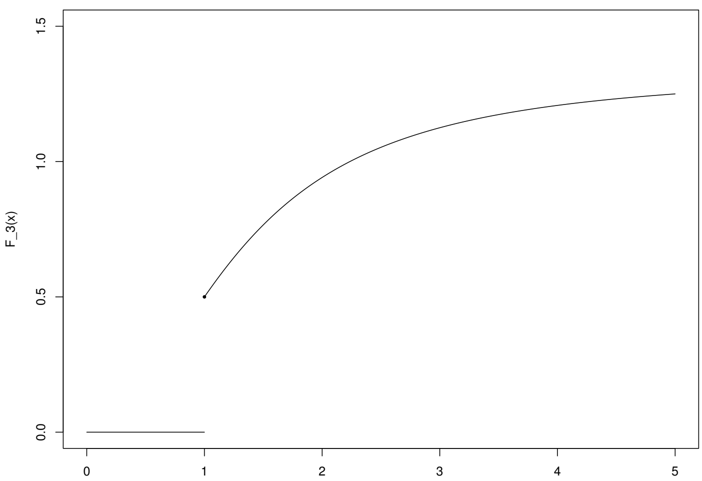
b) F_2 *ist wegen* $\pi/8 < 0.5$ *nicht monoton wachsend. Skizze:*



c) Wegen

$$\lim_{x\to\infty} F_3(x) = \frac{4}{3}$$

erfüllt F_3 *nicht alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. Skizze:*



H 8 Die Dichte einer stetig verteilten Zufallsvariable X sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{für} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X.

c) Bestimmen Sie den Median, den Erwartungswert und die Varianz von X.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right)$.

a)

b) Wir unterscheiden die beiden Fälle, bei denen man etwas rechnen muss:

- $-1 \leq t \leq 0$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^{t} (1+x)\,dx \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{t} \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 - (-1 + \frac{1}{2}) \\ &= t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $0 < t \leq 1$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{t} (1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{t} \\ &= \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2 - 0 = \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2. \end{aligned}$$

Und damit erhält man insgesamt (wenn man wieder t durch x ersetzt):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}x^2 & \text{für} \ -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für} \ 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

Skizze der Verteilungsfunktion:

c) Die Parallele zur x-Achse in der Höhe 0.5 (in der Skizze durch die gestrichelte Linie dargestellt) schneidet F an der Stelle 0, deshalb ist der Median von X (also das 0.5-Quantil) gerade 0.
Die Skizze der Dichtefunktion lässt erkennen, dass f symmetrisch zu $x = 0$ ist. Deshalb gilt auch $E(X) = 0$. Zur Übung bestimmen wir den Erwartungswert auch noch durch abschnittsweise Integration (die Integrale, bei denen über 0 integriert wird, sind dabei

ausgespart):

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+x^2)\,dx + \int_{0}^{1} (x-x^2)\,dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\
&= 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
P\left(|X| \le \frac{1}{2}\right) &= P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\,.
\end{aligned}$$