Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften
3. Übung
Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 8

a) Ein Professor möchte herausfinden, welche 5 seiner insgesamt 8 Mitarbeiter zusammen das kreativste Team darstellen. Wie viele 5-köpfige Teams kommen hierfür in Frage?

b) Auf wie viele Arten kann man 4 Physikbücher, 3 Biologiebücher und 8 Chemiebücher so in einen Schrank stellen, dass Bücher des gleichen Faches nebeneinander stehen?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein 5-köpfiges Gremium aus Biologen, Chemikern oder Physikern zusammenzustellen, wenn lediglich diese Wissenschaftler als Mitglieder in Frage kommen, aber keine der drei Fachrichtungen notwendig vertreten sein muss?

d) Eine Klausur besteht aus 10 Multiple-Choice-Aufgaben mit je drei Lösungen zur Auswahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Klausurzettel auszufüllen, wenn zu jeder Frage genau eine Antwort gegeben wird?

e) Wir betrachten n Elemente und die Anzahl der Möglichkeiten, daraus $k \leq n$ Elemente zu ziehen.
Erstellen Sie eine Tabelle, welche die Formeln für die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten für die Fälle mit/ohne Zurücklegen und mit/ohne Reihenfolge darstellt.

a) **Kombination, speziell: ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**
Es geht darum, aus einer Menge von 8 Personen eine Menge von 5 Personen herauszuholen. Dabei spielt die Anordnung keine Rolle und Wiederholungen sind nicht erlaubt. Es gibt daher $\binom{8}{5} = 56$ *Möglichkeiten.*

b) **Permutation**
Wir überlegen zunächst, wie die Buchblöcke Physik (P), Biologie (B) und Chemie (C) angeordnet werden können. Dafür gibt es $3!$ *Möglichkeiten, da keine Wiederholungen vorkommen dürfen und die Anordnung beachtet werden muss. Für die Kombinationen innerhalb der Blöcke gibt es aus den selben Gründen 4! (bei P), 3! (bei B) und 8! (bei C) Möglichkeiten, so dass man die Bücher insgesahttp://www.ard.de/boulevard/-/id=1876/wedkz6/index.htmlmt auf* $3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 8! = 34\,836\,480$ *Möglichkeiten (!) in den Schrank stellen kann.*

c) **Kombination, speziell: ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen**
Bei dieser Fragestellung spielt die Anordnung keine Rolle, außerdem sind Wiederholungen erlaubt (es geht nicht um einzelne Individuen, sondern um die Fachrichtung, die durch das Individuum vertreten wird). Die Anzahl der Möglichkeiten, dieses Gremium zu besetzen, ist deshalb $\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+5-1}{5} = 21$ *(da* $n = 3$ *und* $k = 5$*). Zur Erläuterung dieses Ergebnisses wird darauf hingewiesen, dass man jede dieser Möglichkeiten wie folgt darstellen kann: in einer Reihe von 7 Plätzen werden 5 Plätze durch die Mitglieder des Gremiums besetzt, die übrigen beiden bleiben als Zeichen der Trennung der Fachrichtung frei. Dabei sitzen ganz links die Biologen, anschließend die Chemiker und rechts die Physiker. Beispiel:*

B	*B*		*C*		*P*	*P*

Dabei muss nicht jede Fachrichtung vertreten sein. Die Möglichkeit

B	*B*		*C*	*C*	*C*	

kommt beispielsweise ohne Physiker aus. Man sieht, dass sich das Ausgangsproblem darauf beschränkt, die 5 Plätze der 7 mit Wissenschaftlern zu besetzen (oder andersherum 2 Plätze freizulassen). Und dafür gibt es die erwähnten $\binom{7}{5} = 21$ *Möglichkeiten.*

d) **Variation, speziell mit Reihenfolge, mit Zurücklegen**
Bei jeder der 10 Aufgaben gibt es drei Antwortmöglichkeiten. Problem so auffassen, dass 10 Mal entweder Antwort a oder b oder c gewählt wird. Wir ziehen also 10 Mal aus einer Menge mit drei Elementen, wobei Wiederholungen erlaubt sind und die Anordnung eine Rolle spielt (die Fragen lassen sich voneinander unterscheiden). Deshalb gibt es $3^{10} = 59\,049$ *Möglichkeiten, den Klausurzettel auszufüllen.*

e)

	mit Zurücklegen mit Wiederholung	*ohne Zurücklegen ohne Wiederholung*
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$
	Ziehen mit Zurücklegen	*Ziehen ohne Zurücklegen*

G 9 Eine faire Münze wird dreimal geworfen.

a) Bestimmen Sie die Ergebnismenge Ω.

b) Schreiben Sie folgende Ereignisse als Teilmengen der Ergebnismenge Ω und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

A: Kopf tritt mindestens einmal auf

B: Zahl tritt genau einmal auf

C: Sowohl Zahl als auch Kopf tritt höchstens zweimal auf

D: Es fällt dreimal Zahl oder dreimal Kopf

c) Berechnen Sie $P(A \cap B)$, $P(B \cup D)$ und $P(C \cap D)$.

d) Sind A und B unabhängig? Beantworten Sie diese Frage auch für die Ereignisse C und D.

a) Wenn eine Münze geworfen wird, gibt es zwei mögliche Ergebnisse: Kopf oder Zahl. Wird diese Münze dreimal geworfen, so kann beim 1. Wurf entweder Kopf oder Zahl, beim 2. Wurf entweder Kopf oder Zahl sowie beim 3. Wurf entweder Kopf oder Zahl fallen. Als Ergebnismenge Ω *ergibt sich daher:*

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \qquad \Omega_i = \{Z, K\},\ \text{für } i = 1,2,3, \\ \text{bzw. } \Omega &= \{(ZZZ),(ZZK),(ZKZ),(ZKK),(KZZ),(KZK),(KKZ),(KKK)\}. \end{aligned}$$

Ω *enthält* $2^3 = 8$ *Elemente.*

b) Kopf tritt mindestens einmal auf ist gleichbedeutend damit, dass Kopf entweder genau einmal, genau zweimal oder genau dreimal auftritt.

$$A = \{(ZZK),(ZKZ),(KZZ),(ZKK),(KZK),(KKZ),(KKK)\}.$$

Da die Münze fair ist und der Ausgang der einzelnen Versuche als unabhängig angesehen werden kann, hat jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$ *die gleiche Wahrscheinlichkeit, d.h.* $P(\{\omega\}) = \frac{1}{8}$ *(Laplace-Experiment).*

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{8} = \frac{7}{8}.$$

Hier bietet es sich auch an, das komplementäre Ereignis $\bar{A} = \{ZZZ\}$ zu betrachten und mittels $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ die Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Das Ereignis B besteht aus folgenden Elementarereignissen:

$$B = \{(ZKK), (KZK), (KKZ)\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass B eintritt, ergibt sich wie für das Ereignis A durch

$$P(B) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in } B}{8} = \frac{3}{8}.$$

Das Ereignis C bedeutet, dass weder Kopf noch Zahl dreimal auftauchen:

$$C = \Omega - \{(ZZZ), (KKK)\} = \{(ZZK), (ZKZ), (KZZ), (ZKK), (KZK), (KKZ)\}.$$

Damit folgt $P(C) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Außerdem ist $D = \{(ZZZ), (KKK)\}$ und damit $P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

c) *Da B in A enthalten ist, gilt $P(A \cap B) = P(B) = \frac{3}{8}$. B und D sind disjunkt, d.h. $B \cap D = \emptyset$, und damit ist $P(B \cup D) = P(B) + P(D) = \frac{5}{8}$. Auch C und D sind disjunkt, woraus $P(C \cap D) = P(\emptyset) = 0$ folgt.*

d) *Den vorigen Aufgabenteilen entnehmen wir*

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3}{8}, \\ P(A) \cdot P(B) &= \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{64} \end{aligned}$$

Wegen $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ sind A und B nicht unabhängig. Mit $P(C \cap D) = 0$ und $P(C), P(D) \neq 0$ ergibt sich analog, dass C und D nicht unabhängig sind.

G 10 Wird ein Patient darauf untersucht, ob er eine bestimmte Krankheit hat, so gibt es zwei Möglichkeiten, eine falsche Diagnose zu stellen: Man spricht von einem falsch-negativ-Befund, wenn bei einem erkrankten Patienten die Krankheit nicht erkannt wird, bzw. von einem falsch-positiv-Befund, wenn ein gesunder Patient für krank befunden wird. Für eine bestimmte Untersuchungsmethode sei bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.06 ein falsch-negativ-Befund, und mit Wahrscheinlichkeit 0.03 ein falsch-positiv-Befund auftritt. Da es sich um eine eher seltene Krankheit handelt, geht man außerdem davon aus, dass eine zu untersuchende Person mit Wahrscheinlichkeit 0.05 erkrankt ist.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für diese Situation.

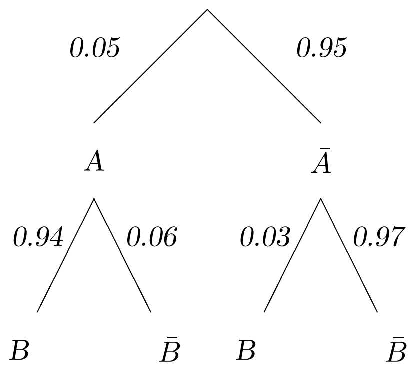
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine zufällig ausgewählte Person für krank erklärt?

c) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn sie für krank erklärt wird?

a) *Wir definieren zunächst die relevanten Ereignisse:*

A: Die Person ist krank.

B: Die Person wird für krank erklärt.



b) *Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit:*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \\ &= 0.94 \cdot 0.05 + 0.03 \cdot 0.95 = 0.0755 \end{aligned}$$

c) *Formel von Bayes:*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{0.94 \cdot 0.05}{0.0755} \approx 0.6225$$

G 11 Mengen Sei $A = \{3, 2, 1\}$, $B = \{24\}$ und $C = \{1, 3\}$.
Gib die Mengen $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$ an.

Es gilt

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 2, 3, 24\}, \\ A \cup C &= \{1, 2, 3\} = A, \\ A \cap B &= \emptyset, \\ A \cap C &= \{1, 3\}, \\ A \setminus B &= \{1, 2, 3\} = A, \\ A \setminus C &= \{2\}, \end{aligned}$$

Hausübung

H 5

a) Zehn Personen verabschieden sich voneinander mit Händedruck. Jede Person geht alleine nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

b) Zehn Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

a) *Hier geht es um die Anzahl an Möglichkeiten, aus einer Menge von 10 Personen genau 2 herauszunehmen, und zwar ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Deshalb lautet die Lösung*

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45.$$

Alternativ kann man alle natürlichen Zahlen von 1 bis 9 addieren und erhält wiederum

$$\sum_{i=1}^{9} i = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

b) *Je zwei Ehepaare schütteln* $2 \cdot 2 = 4$ *Mal die Hände bei der Verabschiedung. Es gibt 45 Verabschiedungen von 2 Paaren (siehe a)). Also werden insgesamt*

$$4 \cdot 45 = 180$$

Mal Hände geschüttelt.

H 6 Die Belegschaft einer Firma setzt sich wie folgt zusammen: 50% Arbeiter, 40% Angestellte und 10% leitende Angestellte. Man geht davon aus, dass während eines Jahres ein Arbeiter mit Wahrscheinlichkeit p, ein Angestellter mit Wahrscheinlichkeit $p/2$ und ein leitender Angestellter mit Wahrscheinlichkeit $p/4$ die Firma verlässt. Mit Wahrscheinlichkeit 14.5% scheidet ein bestimmtes Belegschaftsmitglied während eines Jahres aus der Firma aus.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm für die beschriebene Situation.

b) Bestimmen Sie p.

c) Nehmen Sie an $p = 0.2$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person, welche die Firma verlässt, ein Arbeiter (Angestellter bzw. leitender Angestellter)?

Wir definieren folgende Ereignisse für ein zufällig ausgewähltes Belegschaftsmitglied.

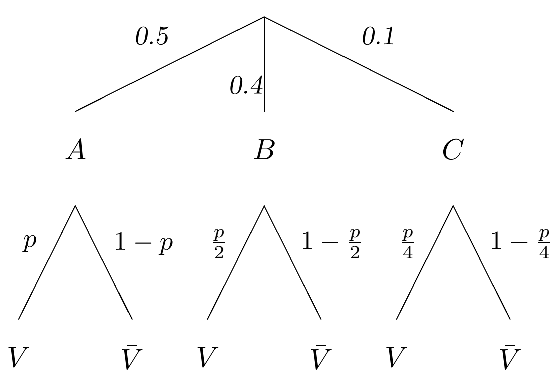
A: *Die Person gehört zu den Arbeitern.*

B: *Die Person gehört zu den Angestellten.*

C: *Die Person gehört zu den leitenden Angestellten.*

V: *Die Person verlässt die Firma während des Jahres.*

a) Baumdiagramm:



b) Nach der Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|A) \cdot P(A) + P(V|B) \cdot P(B) + P(V|C) \cdot P(C) \\ &= p \cdot 0.5 + \frac{p}{2} \cdot 0.4 + \frac{p}{4} \cdot 0.1 = 0.725p. \end{aligned}$$

Aus $P(V) = 0.145$ *folgt daher* $p = 0.2$.
c) Die Formel von Bayes ergibt:

$$\begin{aligned}
P(A|V) &= \frac{P(V|A)P(A)}{P(V)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.145} \approx 0.6897, \\
P(B|V) &= \frac{P(V|B)P(B)}{P(V)} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.145} \approx 0.2759, \\
P(C|V) &= \frac{P(V|C)P(C)}{P(V)} = \frac{0.05 \cdot 0.1}{0.145} \approx 0.0345.
\end{aligned}$$