Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften

2. Übung

Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 (a) Schreiben Sie
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{625}$$
als geschlossenen Ausdruck mit dem Summenzeichen.

(b) Schreiben Sie
$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{49}$$
als geschlossenen Ausdruck mit dem Produktzeichen.

(c) Berechnen Sie
$$\ln\left(\prod_{i=1}^{100} e^i\right).$$

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{25} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{625}.$$

$$(b) \qquad \prod_{i=1}^{25} \frac{1}{2i-1} = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{49}.$$

$$(c) \qquad \ln\left(\prod_{i=1}^{100} e^i\right) = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{(1+100)\cdot 100}{2} = 5050.$$

G 5 Der neue Vorstand eines Fußballvereins hatte sich vorgenommen, die Attraktivität der Heimspiele so zu verbessern, dass im Durchschnitt pro Saison 10 % mehr Zuschauer kommen. Nach der fünften Saison ließ sich folgende Bilanz ziehen:

1. Saison:	145.000 Zuschauer (Ausgangswert)
2. Saison:	158.050 Zuschauer
3. Saison:	177.016 Zuschauer
4. Saison:	191.177 Zuschauer
5. Saison:	208.383 Zuschauer

Berechnen Sie den durchschnittlichen Zuwachs mit einem geeigneten Mittelwert und entscheiden Sie, ob der neue Vorstand sein Ziel erreicht hat.

Saison	*Zuschauer*	*Zuwachsrate*
1.	*145.000*	*(Ausgangswert)*
2.	*158.050*	$1,09$
3.	*177.016*	$1,12$
4.	*191.177*	$\approx 1,08$
5.	*208.383*	$\approx 1,09$

$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[4]{\prod_{i=1}^{4} x_i} \approx 1,0949.$$

Der Durchschnittliche Zuwachs beträgt rund $9,49\%$. Somit hat der neue Vorstand sein Ziel nicht erreicht.

G 6 In einer italienischen Stadt betrugen die Verkaufspreise für Bauland (pro qm)

Jahr	1996	2006
Lage A	130.000 Lire	80 Euro
Lage B	170.000 Lire	100 Euro
Lage C	190.000 Lire	120 Euro
Lage D	270.000 Lire	150 Euro
Lage E	310.000 Lire	170 Euro
Lage F	330.000 Lire	180 Euro
Lage G	350.000 Lire	250 Euro

Berechnen Sie anhand einer geeigneten Kennzahl, in welchem Jahr die Streuung größer war.

Vergleich anhand des dimensionslosen Variationskoeffizienten $V = \frac{s}{\bar{x}}$.

$$1996: \quad \bar{x} = 250.000 \text{ Lire} \quad s^2 = 6{,}4 \cdot 10^9 \text{ Lire}^2 \quad s = 80.000 \text{ Lire} \quad V = 32\%$$

$$2006: \quad \bar{x} = 150 \text{ Euro} \quad s^2 = 2800 \text{ Euro}^2 \quad s \approx 52{,}92 \text{ Euro} \quad V \approx 35{,}28\%$$

2006 war die Streuung größer.

G 7 Leiten Sie aus den Kolmogoroff'schen Axiomen der Wahrscheinlichkeiten das sogenannte Additionstheorem her.

Schritt a) *Wir zeigen* $P(\emptyset) = 0$.
Setze $A_1 = \Omega$, $A_n = \emptyset$ *für* $n \geq 2$. *Daraus folgt* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine paarweise disjunkte Folge von Ereignissen.*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &\overset{\text{Axiom III}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \\ \iff \quad P(\Omega) &= P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset) \\ \iff \quad 0 &= P(\emptyset) \sum_{n=2}^{\infty} 1 \\ \iff \quad P(\emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Schritt b) *Wir zeigen, dass aus* $A \cap B = \emptyset$ *folgt* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Setze $A_1 = A$, $A_2 = B$ *und* $A_n = \emptyset$ *für* $n \geq 3$. *Daraus folgt* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine paarweise disjunkte Folge von Ereignissen.*

$$P(A \cup B) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{\text{Axiom III}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = P(A) + P(B) + \sum_{n=3}^{\infty} P(\emptyset) \overset{\text{mit (a)}}{=} P(A) + P(B).$$

Schritt c) *Wir zeigen nun* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup \left(\bar{A} \cap B\right) \quad \text{mit} \quad A \cap \left(\bar{A} \cap B\right) = \emptyset \\ B &= (A \cap B) \cup \left(\bar{A} \cap B\right) \quad \text{mit} \quad (A \cap B) \cap \left(\bar{A} \cap B\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &\overset{\text{mit (b)}}{=} P(A) + P\left(\bar{A} \cap B\right) \\ &= P(A) + P\left(\bar{A} \cap B\right) + P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &\overset{\text{mit (b)}}{=} P(A) + P\Big(\left(\bar{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\Big) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Hausübung

H 3 In einem Krankenhaus wurden von 20 neugeborenen Babys jeweils Körperlänge (1. Wert in cm) und Kopfumfang (2. Wert in cm) gemessen. Dabei ergaben sich folgende Messdatenpaare:

(49,2;34,9)	(51,0;35,9)	(52,4;36,3)	(48,2;34,8)	(51,6;36,9)
(48,5;33,4)	(49,8;35,5)	(51,3;35,2)	(48,9;37,0)	(49,5;34,1)
(50,9;35,4)	(51,4;36,2)	(51,1;34,2)	(48,6;35,1)	(49,4;36,0)
(52,8;37,8)	(52,1;37,4)	(50,7;36,8)	(50,3;36,1)	(50,3;35,3)

(a) Stellen Sie diese Daten in einem Punktediagramm graphisch dar.

(b) Bestimmen Sie die Kontingenztafeln einmal für die absoluten und einmal für die relativen Häufigkeiten dieser zweidimensionalen Messreihe, indem Sie für beide Merkmale Intervalleinteilungen in ganzen Zentimeter-Abständen wählen wie folgt: Für die Körperlänge 48,0 - 48,9 bis 52,0 - 52,9 sowie für den Kopfumfang 33,0 - 33,9 bis 37,0 - 37,9.

(c) Was können Sie daran ablesen?

Kontingenztafel für die absoluten / relativen Häufigkeiten:

	33,0 - 33,9	34,0 - 34,9	35,0 - 35,9	36,0 - 36,9	37,0 - 37,9	Σ
48,0 - 48,9	1 / 5%	1 / 5%	1 / 5%	0 / 0%	1 / 5%	4 / 20%
49,0 - 49,9	0 / 0%	2 / 10%	1 / 5%	1 / 5%	0 / 0%	4 / 20%
50,0 - 50,9	0 / 0%	0 / 0%	2 / 10%	2 / 10%	0 / 0%	4 / 20%
51,0 - 51,9	0 / 0%	1 / 5%	2 / 10%	2 / 10%	0 / 0%	5 / 25%
52,0 - 52,9	0 / 0%	0 / 0%	0 / 0%	1 / 5%	2 / 10%	3 / 15%
Σ	1 / 5%	4 / 20%	6 / 30%	6 / 30%	3 / 15%	20 / 100%

Allgemein lässt sich die Tendenz ablesen, dass mit größerer Körperlänge auch ein größerer Kopfumfang einhergeht.

H 4 Ein Glücksrad hat 15 Segmente. Jedes Segment ist mit einer der Ziffern 1 bis 15 beschriftet. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Gehen Sie dabei von einem Laplace-Experiment aus.

(a) Bestimmen Sie die Ergebnismenge Ω.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Es tritt eine gerade Zahl auf

B: Es tritt eine durch 3 teilbare Zahl auf

C_k: Es tritt eine Zahl $\leq$ k auf für k=1,...,15

(c) Berechnen Sie $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(C_3 \cup C_4)$, $P(\bar{C}_9 \cap A)$ und $P(A \cap \bar{B})$.

(*a*) $\Omega = \{1, 2, \ldots, 15\}$

(*b*)
$$P(A) = \frac{|\{2, 4, \ldots, 14\}|}{|\Omega|} = \frac{7}{15}$$
$$P(B) = \frac{|\{3, 6, 9, 12, 15\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$
$$P(C_k) = \frac{|\{1, 2, \ldots, k\}|}{|\Omega|} = \frac{k}{15}$$
für $k \in \{1, 2, \ldots, 15\}$

(*c*)
$$P(A \cap B) = \frac{|\{6, 12\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{15}$$
$$P(A \cup B) = \frac{|\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{3}$$
$$P(C_3 \cup C_4) = P(C_4) = \frac{4}{15}$$
$$P(\bar{C}_9 \cap A) = \frac{|\{10, 12, 14\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{5}$$
$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{|\{2, 4, 8, 10, 14\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}.$$