Fachbereich Mathematik
Dr. M. Döring
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

05.12.2007

Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften
7. Übung

Gruppenübung

G 22 Bei der Größenmessung in einer Gruppe von 9 Personen ergaben sich folgende Körpergrößen [in cm]:

`184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4.`

Diese Messwerte werden als Realisationen der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_9$ angenommen, die unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt seien.

(a) Geben Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.99 für den Erwartungswert μ an, falls die Standardabweichung bekannt ist und $\sigma = 2.4$ [cm] beträgt.

(b) Welches Konfidenzintervall ergibt sich in (a) für dasselbe Konfidenzniveau, falls die Standardabweichung als unbekannt angenommen wird?

(c) Ermitteln Sie im letzteren Fall ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Varianz σ^2.

G 23 Eine Apparatur füllt eine bestimmte Menge (in g) eines pulverförmigen Medikaments ab. Es wird angenommen, dass diese Menge durch eine normalverteilte Zufallsvariable X mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2 beschrieben werden kann. Zehn Messungen ergaben folgende Werte $x_1, \ldots, x_{10}$ für die abgefüllte Menge:

18.3 20.2 20.7 19.8 19.5 20.9 18.1 20.5 20.4 17.6.

(a) Geben Sie die konkreten Intervallgrenzen des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.9$ an.
Hinweis: $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 3\,854.3$

(b) Wie verändern sich die Intervallgrenzen des Konfidenzintervalls für μ zum Niveau $1 - \alpha = 0.9$, falls zusätzlich $\sigma^2 = 1$ bekannt ist?

G 24 Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < \theta - 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2} & \theta - 1 \leq x \leq \theta + 1 \\ 1 & x > \theta + 1 \end{cases}$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist.
Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \bar{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.
Hinweis: Bestimmen Sie als erstes den Erwartungswert der Zufallsvariablen.

G 25 (a) Bestimmen Sie die folgenden Quantile:

$$\chi_{6;0.95},\ \chi_{14;0.01},\ z_{0.975},\ z_{0.8}, t_{10;0.05},\ t_{3;0.975}.$$

(b) Gegeben sei die folgende Stichprobe

$$0.085,\ 1.08,\ 0.35,\ 3.28,\ 1.24,\ 2.58,\ 0.02,\ 0.13,\ 0.22,\ 0.52.$$

Bestimmen Sie den Median und das harmonische Mittel dieser Stichprobe.

Hausübung

H 13 In einer Stadt liegen für 121 Jahre die Niederschlagsmengen im Monat April vor. Die Messreihe $x_1, \ldots, x_{121}$ (x_i = Niederschlagshöhe in mm im i-ten Jahr) hat das arithmetische Mittel $\bar{x}_{121} = 53.68$ und die empirische Standardabweichung $s_x = 6.13$. Es wird angenommen, dass die Werte $x_1, \ldots, x_{121}$ eine Realisierung von 121 unabhängigen, identisch $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$–verteilten Zufallsvariablen sind. Mit Konfidenzschätzverfahren zum Niveau $1-\alpha = 0.98$ bestimme man je ein konkretes Schätzintervall

(a) für μ,

(b) für σ^2,

(c) für μ unter der Voraussetzung $\sigma^2 = 6.13^2$,

Hinweis: $\chi^2_{120;0.99} = 158.962$ und $\chi^2_{120;0.01} = 86.909$

H 14 Um die Präzision einer Waage zu überprüfen, wird n-mal das Gewicht eines Kilogramm-Prototyps gemessen. Die entstehende Messreihe soll als Realisierung von unabhängigen, identisch $N(1, \theta)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit unbekannter Varianz $\theta > 0$ aufgefasst werden.
Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_n für $\tau(\theta) = \theta$.