



Statistik I für Human- und Sozialwissenschaften

4. Übung

Gruppenübung

G 12 Prüfen Sie jeweils, ob die angegebene Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Skizzieren Sie gegebenenfalls die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X , deren Verteilung durch $P(\{a < X \leq b\}) = P_X((a, b]) = \int_a^b f(x) dx$, für $a < b$, gegeben ist.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1/8 & \text{für } 1 \leq x \leq 3, \\ 1/2 & \text{für } 5 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3\pi/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \left(4\sqrt{|x|}\right)^{-1} & \text{für } -1 \leq x < 0 \text{ oder } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

G 13 Fünf Musikgruppen geben demnächst in ihrer Stadt Konzerte. Die Eintrittskarten sind unterschiedlich teuer. Gruppe $G_1 = 20$ Euro, $G_2 = 40$ Euro, $G_3 = 50$ Euro, $G_4 = 36$ Euro und $G_5 = 28$ Euro. Sie können sich nicht entscheiden und beschließen zwei zufällig ausgesuchte Konzerte zu besuchen und entsprechende Karten zu kaufen.

- Beschreiben Sie den Ergebnisraum.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis an.
- Geben Sie den Wertebereich der folgenden Zufallsvariablen an:

X_1 = nichtnegative Preisdifferenz zwischen den beiden Karten in Euro

X_2 = arithmetische Mittel der beiden Karten in Euro

X_3 = Preis der teureren Karte in Euro.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen und die Verteilungsfunktionen der drei Zufallsvariablen.
- Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_3 .
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_3 .

G 14 Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen die Ableitung und Stammfunktion:

$$f(x) := 2x^4 + 3x^3 - x - \ln(5)$$

$$g(x) := 5^x$$

$$h(x) := x \ln(x)$$

Hausübung

H 7 Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie jeweils die Funktion.

$$\text{a) } F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2(x+5)) & \text{für } x > -5, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{b) } F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 0.5 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ \pi/8 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\text{c) } F_3(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{3x^2+5} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

H 8 Die Dichte einer stetig verteilten Zufallsvariable X sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Skizzieren Sie die Funktion f .
- Berechnen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X .
- Bestimmen Sie den Median, den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq \frac{1}{2})$.