Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Dezember, 2008

2. Hausaufgabe Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

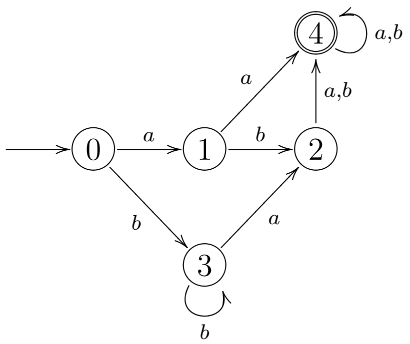
Abgabe: Fr 19. Dezember, in der Übung

Geben Sie bitte ihren Namen und die Nummer ihrer Übungsgruppe an.

(H2.1) [Reguläre Sprachen]

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und
$$L = L(a(ab)^*(a + b)).$$
Geben Sie einen NFA $\mathcal{A}$ an mit $L(\mathcal{A}) = L$.

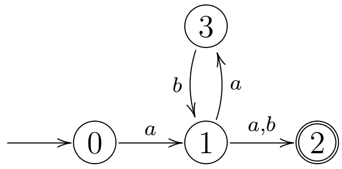
(b) Betrachten Sie den DFA $\mathcal{B}$:



Bestimmen Sie $L(\mathcal{B})$.

Musterlösung.

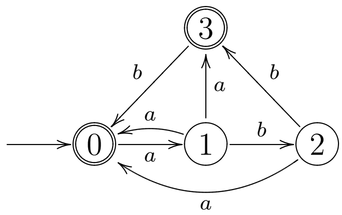
(a) NFA:



(b) $aa(a+b)^* + ab(a+b)(a+b)^* + bb^*a(a+b)(a+b)^*$.

(H2.2) [Potenzmengen-Trick]

Betrachten Sie den NFA $\mathcal{A}$



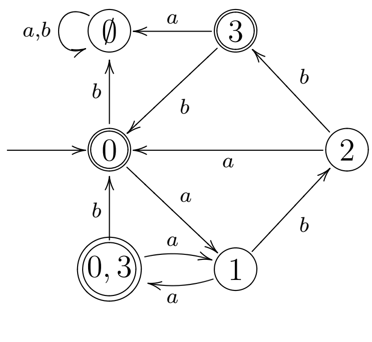
und sei $L = L(\mathcal{A})$.

Konstruieren Sie einen DFA $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = L$.

Musterlösung.

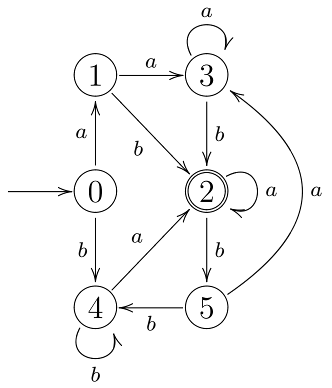
δ	a	b
$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{0,3\}$	$\{2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,3\}$	$\{1\}$	$\{0\}$
$\{2\}$	$\{0\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\emptyset$	$\{0\}$

Die erreichbare Zuständen sind $\{0\}, \{1\}, \emptyset, \{0,3\}, \{2\}$ und $\{3\}$. Akzeptierend sind $\{0\}, \{0,3\}$ und $\{3\}$:



(H2.3) [Minimierung]

Betrachten Sie den DFA $\mathcal{A}$



und sei $L = L(\mathcal{A})$.

Konstruieren Sie einen minimalen DFA $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = L$.

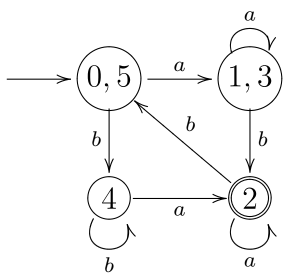
Musterlösung.

Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	0	1	2	3	4	5
0			×			
1			×			
2	×	×		×	×	×
3			×			
4			×			
5			×			

$\not\sim_1$	0	1	2	3	4	5
0		×	×	×	×	
1	×		×		×	×
2	×	×		×	×	×
3	×		×		×	×
4	×	×	×	×		×
5		×	×	×	×	

Da $\not\sim_1 = \not\sim_2$ ist die Relation $\not\sim$ durch die letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände 0 und 5 und 1 und 3 paarweise identifizieren können. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



(H2.4) [Pumping Lemma]

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und
$$L_1 = \{a^n bc^n \,:\, n \geqslant 2\}.$$
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache L_1 nicht regulär ist.

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und
$$L_2 = \{x \in \Sigma^* \,:\, 2|x|_a = |x|_b\}.$$
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache L_2 nicht regulär ist.

Musterlösung.

(a) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geqslant n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort
$$x = a^n bc^n.$$
Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mehr c's (nämlich n) als a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir schliessen, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort
$$x = a^n b^{2n}.$$
Offensichtlich $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ gleichviel b's enthält wie x (nämlich $2n$), aber weniger als n a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir schliessen, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.