Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Februar, 2009

7. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E7.1) [Kellerautomaten]

Konstruieren Sie einen Kellerautomat, der die folgende kontextfreie Sprache erkennt:

$$L = \{a^i b^j c^k \,:\, i = j + k\}.$$

Musterlösung.

Sei $\mathcal{P} = (\Sigma, Q, q_a, \Delta, A, \Gamma, \#)$ der Kellerautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, Zustandsmenge $Q = \{q_a, q_b, q_c\}$, q_a als Anfangszustand, $A = \{q_a, q_b, q_c\}$ als Menge der akzeptierenden Zustände, Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, |\}$ und Übergangsrelation Δ gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \{ & (q_a, \#, \varepsilon, \varepsilon, q_a) \\ & (q_a, \#, a, |, q_a) \\ & (q_a, |, a, ||, q_a) \\ & (q_a, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_a, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_b, |, b, \varepsilon, q_b) \\ & (q_b, |, c, \varepsilon, q_c) \\ & (q_c, |, c, \varepsilon, q_c) \qquad \}. \end{array}$$

Dann erkennt $\mathcal{P}$ die Sprache L.

(E7.2) [Chomsky-Hierarchie]

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Zu welchem Niveau der Chomsky-Hierarchie gehören die folgenden Sprachen?

$L_1 = \{w \in \Sigma^* :$ zu jedem a kann man eine spätere Stelle mit einem b finden derart, dass jedes b zu höchstens einem a gehört $\}$

$L_2 = \{w \in \Sigma^* :$ wenn in w ein a vorkommt, dann gibt es eine spätere Stelle, an der ein b steht, wobei dieses b zu mehreren a's gehören kann $\}$

Musterlösung.

(i) L_1 ist kontextfrei aber nicht regulär.

Angenommen L_1 wäre regulär. Sei n die Konstante aus dem Pumping Lemma und setze $x = a^n b^n$. Nach dem Lemma gibt es eine Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leqslant n, v \neq \varepsilon$ und $uv^m w \in L_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Da $|uv| \leqslant n$, ist $u = a^i$ und $v = a^k$ für geeignete $i, k \leqslant n$. Also ist $uv^2w = a^{n+k}b^n \notin L_1$. Widerspruch!

Ein PDA für L_1 ist $\mathcal{P} = (\Sigma, Q, q, \Delta, A, \Gamma, \#)$ mit $Q = \{q\}$, $\Gamma = \{\#, |\}$, $A = \{q\}$ und Transitionen

$$\begin{array}{lllllll} \{ & (q, & \#, & \varepsilon, & \varepsilon, & q) & \\ & (q, & \#, & b, & \#, & q) & \\ & (q, & \#, & a, & |\#, & q) & \\ & (q, & |, & a, & ||, & q) & \\ & (q, & |, & b, & \varepsilon, & q) & \\ & (q, & \#, & c, & \#, & q) & \\ & (q, & |, & c, & |, & q) & \}. \end{array}$$

(ii) $L_2 = L(c^* + (a + b + c)^* bc^*)$ ist regulär.

(E7.3) [Aufzählbarkeit]

Zeigen Sie, dass die aufzählbare Teilmengen von Σ^* unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen sind.

Musterlösung.

Nach Definition 3.4.12 heißt eine Menge $L \subseteq \Sigma^*$ aufzählbar, wenn L von einer Turingmaschine akzeptiert wird. Nehmen wir deshalb an, dass $K \subseteq \Sigma^*$ von einer Turingmaschine $\mathcal{M}_K$ akzeptiert wird, und $L \subseteq \Sigma^*$ von $\mathcal{M}_L$.

Die folgende Maschine $\mathcal{M}$ akzeptiert die Sprache $K \cap L$: auf einer bestimmten Eingabe führt die Machine M gleichzeitig die Berechnungen von $\mathcal{M}_K$ und $\mathcal{M}_L$ auf dieser Eingabe aus, bis beide terminieren (was auch nie der Fall sein kann!). Sind beide Berechnungen terminiert, wird die Eingabe nur dann von M akzeptiert, wenn sie von beiden Maschinen akzeptiert wird; andernfalls wird sie verworfen.

Die Sprache $K \cup L$ wird von der folgenden Maschine $\mathcal{M}'$ akzeptiert: auf einer bestimmten Eingabe führt die Machine $\mathcal{M}'$ gleichzeitig die Berechnungen von $\mathcal{M}_K$ und $\mathcal{M}_L$ auf dieser Eingabe aus, bis eine von beiden terminiert (was auch nie der Fall sein kann!). Wird die Eingabe von der terminierten Machine akzeptiert, dann wird sie auch von $\mathcal{M}'$ akzeptiert. Wird sie verworfen, dann macht $\mathcal{M}'$ mit der anderen Berechnung weiter, bis diese terminiert (was wieder nie der Fall sein kann!). Wird die Eingabe von der anderen Maschine akzeptiert, wird sie auch von $\mathcal{M}'$ akzeptiert; wird die Eingabe wieder verworfen, dann wird sie auch von $\mathcal{M}'$ verworfen.

(E7.4) [Postsche Korrespondenzproblem]

Im Postschen Korrespondenzproblem ist eine endliche Folge von Wortpaaren $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$ mit $x_i, y_i \in \Sigma^+$ gegeben. Gefragt ist, ob es eine Folge von Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ $(n \geqslant 1)$ gibt, mit

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}.$$

Wenn eine solche Folge existiert, heißt diese eine Lösung des Korrespondenzproblems $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$. Man kann zeigen, dass man nicht rekursiv entscheiden kann, ob eine Lösung existiert.

Zeigen Sie, dass das folgende Korrespondenzproblem keine Lösungen hat.

i	x_i	y_i
1	10	101
2	011	11
3	101	011

Musterlösung.

Nehmen wir an, es gäbe ein Lösung $i_1, i_2, \ldots, i_n$, und sei $\mathbf{x} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ und $\mathbf{y} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$. Da die Wörter $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ mit demselben Buchstabe anfangen müssen, ist $i_1 = 1$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 10 \cdots \\ \mathbf{y} &= 101 \cdots \end{aligned}$$

Es folgt, dass x_{i_2} mit einer 1 anfangen muss, also ist i_2 entweder 1 oder 3. $i_2 = 1$ ist unmöglich, da andererseits der vierte Buchstabe in $\mathbf{x}$ die 0 ist und in $\mathbf{y}$ die 1. Also ist $i_2 = 3$.

Wir können jetzt (induktiv) zeigen, dass wir für alle $n > 2$ auch $i_n = 3$ haben müssen. Wir sind nämlich immer in der Lage, dass das Wort $\mathbf{y}$ einen Buchstabe länger ist als $\mathbf{x}$, und dass der fehlende Buchstabe in $\mathbf{x}$ die 1 ist. Also muss man die Folge $i_1, i_2, \ldots, i_n$ immer erweitern, und wegen der Gründe die wir bereits gesehen haben, muss das immer mit $i_{n+1} = 3$ geschehen. Da unendliche Lösungen nicht erlaubt sind, gibt es für dieses Korrespondenzproblem also keine Lösung.