Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

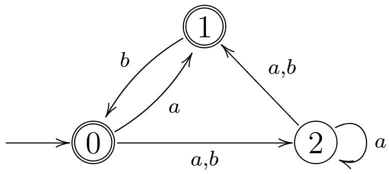
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

23. Januar, 2009

6. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E6.1) [**Minimierung**]

Betrachten Sie den NFA $\mathcal{A}$



und sei $L = L(\mathcal{A})$.

Konstruieren Sie einen minimalen DFA $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = L$.

Musterlösung.

Erst müssen wir einen DFA finden, der die gleiche Sprache erkennt.

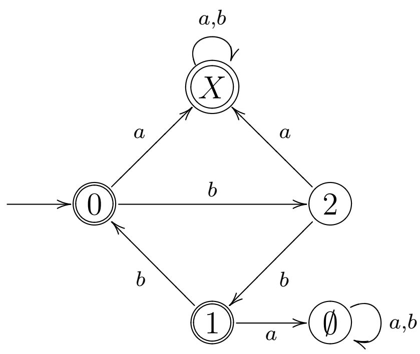
δ	a	b
$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1\}$
$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$
$\{0,1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,2\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0\}$
$\{0,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\emptyset$
$\{0\}$			$\times$				$\times$
$\{1,2\}$			$\times$				$\times$
$\{2\}$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	
$\{0,1\}$			$\times$				$\times$
$\{1\}$			$\times$				$\times$
$\{0,2\}$			$\times$				$\times$
$\emptyset$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	

$\not\sim_1$	$\{0\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\emptyset$
$\{0\}$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{1,2\}$	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\{2\}$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{0,1\}$	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\{1\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$\{0,2\}$	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\emptyset$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	

Da $\not\sim_2 = \not\sim_1$ ist die Relation $\not\sim$ durch die Letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände $\{1,2\}$ und $\{0,1\}$ und $\{0,2\}$ identifizieren können (wir nennen den neuen Zustand X). Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



(E6.2) [Pumping Lemma für Kontextfreie Sprachen]

Zeige, dass die Sprache

$$L = \{a^n b^m a^n b^m \; : \; m, n \geqslant 0\}$$

nicht kontextfrei ist.

Musterlösung.

Wir zeigen, dass das Pumping Lemma verletzt ist. Das heißt:

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in L$ mit $|x| \geqslant i$, so dass für alle Zeichenreihen y, u, v, w, z, mit $x = y \cdot u \cdot v \cdot w \cdot z$, $|uw| > 0$ und $|uvw| \leqslant i$, es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$y \cdot u^j \cdot v \cdot w^j \cdot z \notin L.$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig und betrachte

$$x = a^i b^i a^i b^i.$$

Offensichtlich ist $x \in L$ und $|x| \geqslant i$. Seien also y, u, v, w, z, mit $x = y \cdot u \cdot v \cdot w \cdot z$, $|uw| > 0$ und $|uvw| \leqslant i$. Wir wählen $j = 2$ und behaupten

$$x' = y \cdot u^2 \cdot v \cdot w^2 \cdot z \notin L.$$

Beweis: Nenne die Teilwörter der Form a^i und b^i in x *Blöcke*. Es gibt jetzt drei Möglichkeiten:

- Entweder u oder w überschreitet eine Blockgrenze (beides zusammen ist wegen $|uvw| \leqslant n$ unmöglich!). Dann enthält entweder u oder w sowohl a's als b's. Das bedeutet, dass x' nicht die Form $a^*b^*a^*b^*$ hat und deshalb nicht in L enthalten sein kann.
- u und w sind in demselben Block enthalten. Dann hat x' einen Block der länger ist als die andere drei und ist deshalb nicht in L enthalten.
- u und w sind in verschiedenen Blöcken. Diese Blöcke müssen benachbart sein, wegen $|uvw| \leqslant i$. Das heißt, dass entweder u nur aus a's besteht und w aus b's, oder umgekehrt. Dann haben die zwei a-Blöcke in x' verschiedene Länge (wenn uw a's enthält), oder die zwei b-Blöcke (wenn uw b's enthält; beides ist natürlich auch möglich!). Jedenfalls ist x' nicht in L enthalten.

(E6.3) [CYK Algorithmus]

Betrachten Sie die kontextfreie Sprache L, die von der folgenden Grammatik in Chomsky-Normalform erzeugt wird:

$$\begin{array}{lcl}
X_0 & \to & Z_aZ_b \mid Z_bZ_a \mid X_0X_0 \mid Z_aX \mid Z_bY \\
X & \to & X_0Z_b \\
Y & \to & X_0Z_a \\
Z_a & \to & a \\
Z_b & \to & b
\end{array}$$

(i) Beschreiben Sie L umgangssprachlich.

(ii) Wenden Sie den CYK Algoritmus an, um zu bestimmen ob $bbab \in L$ und $aabbab \in L$.

Musterlösung.

(i) L besteht aus den Worte in $\{a,b\}^*$, die gleichviel a's wie b's enthalten.

(ii) Erzeugbare Teilworte der Länge 1:

$$\begin{array}{rcl} a & : & Z_a \\ b & : & Z_b \end{array}$$

Erzeugbare Teilworte der Länge 2:

$$\begin{array}{rcl} aa & : & - \\ ab & : & X_0 \\ bb & : & - \\ ba & : & X_0 \end{array}$$

Erzeugbare Teilworte der Länge 3:

$$\begin{array}{rcl} aab & : & - \\ abb & : & X \\ bba & : & - \\ bab & : & X \end{array}$$

Erzeugbare Teilworte der Länge 4:

$$\begin{array}{rcl} aabb & : & X_0 \\ abba & : & X_0 \\ bbab & : & - \end{array}$$

Erzeugbare Teilworte der Länge 5:

$$\begin{array}{rcl} aabba & : & Y \\ abbab & : & X \end{array}$$

Deshalb ist $bbab$ nicht erzeugbar, und $aabbab$ ist erzeugbar (mittels $X_0 \to Z_a X$).

(E6.4) [Kellerautomaten]

(i) Sei L eine kontextfreie Sprache und M eine reguläre Σ-Sprache. Zeigen Sie, dass $L \cap M$ eine kontextfreie Σ-Sprache ist.

Hinweis: sei $\mathcal{P}$ ein Kellerautomat für L, und $\mathcal{A}$ ein NFA für M. Konstruieren Sie daraus (wie in Lemma 2.2.11(a) im Skript) einen Kellerautomat $\mathcal{Q}$, der $L \cap M$ erkennt.

(ii) In E6.2 zeigten Sie (hoffentlich!), dass

$$N = \{a^n b^m a^n b^m \;:\; m,n \geqslant 0\}$$

keine kontextfreie Sprache ist. Schließen Sie hieraus, dass auch

$$L = \{ww \;:\; w \in \{a,b\}^*\}$$

keine kontextfreie Sprache ist.

Musterlösung.

(i) Sei $\mathcal{P} = (\Sigma, Q^1, q_0^1, \Delta^1, A^1, \Gamma, \#)$ ein Kellerautomat, der L erkennt und $\mathcal{A} = (\Sigma, Q^2, q_0^2, \Delta^2, A^2)$ ein NFA der M erkennt. Wir konstuieren einen Kellerautomat $\mathcal{Q} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A, \Gamma, \#)$, der $L \cap M$ erkennt:

$$\begin{aligned} Q &= Q^1 \times Q^2 \\ q_0 &= (q_0^1, q_0^2) \\ A &= A^1 \times A^2, \end{aligned}$$

und

$$((q,p), \gamma, x, \beta, (q',p')) \in \Delta \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \big((q,\gamma,x,\beta,q') \in \Delta^1 \text{ und } (p,x,p') \in \Delta^2 \text{ und } x \neq \varepsilon\big) \text{ oder} \\ \big((q,\gamma,x,\beta,q') \in \Delta^1 \text{ und } x = \varepsilon\big) \end{array}$$

(ii) Die Sprache $M = L(a^*b^*a^*b^*)$ ist regulär und $N = L \cap M$. Wäre L kontextfrei, dann wäre N das auch. N ist aber nicht kontextfrei.