Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

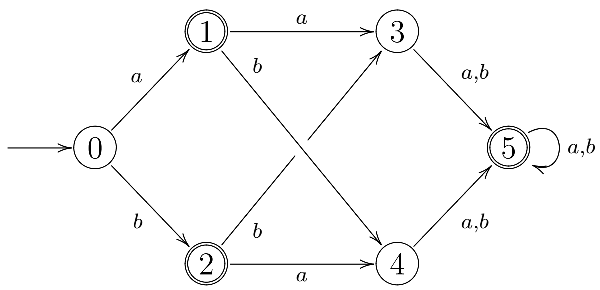
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Dezember, 2008

5. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E5.1) [Minimalautomaten und Minimierung]

Finden Sie einen äquivalenten DFA minimaler Größe für den folgenden DFA:



Musterlösung.

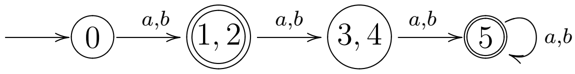
Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	0	1	2	3	4	5
0		×	×			×
1	×			×	×	
2	×			×	×	
3		×	×			×
4		×	×			×
5	×			×	×	

$\not\sim_1$	0	1	2	3	4	5
0		×	×			×
1	×			×	×	×
2	×			×	×	×
3		×	×			×
4		×	×			×
5	×	×	×	×	×	

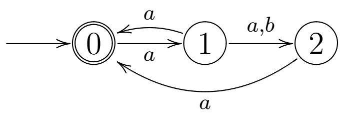
$\not\sim_2$	0	1	2	3	4	5
0		×	×	×	×	×
1	×			×	×	×
2	×			×	×	×
3	×	×	×			×
4	×	×	×			×
5	×	×	×	×	×	

Da $\not\sim_2 = \not\sim_3$ ist die Relation $\not\sim$ durch die Letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände 1 und 2, bzw. 3 und 4 identifizieren können. Deshalb sieht der DFA minimaler Größe wie folgt aus:



(H5.2) [Minimierung]

Betrachten Sie den NFA $\mathcal{A}$



und sei $L = L(\mathcal{A})$.

Konstruieren Sie einen minimalen DFA $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{B}) = L$.

Musterlösung.

Erst müssen wir einen DFA finden, der die gleiche Sprache erkennt.

δ	a	b
$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{0,2\}$	$\{1,0\}$	$\emptyset$
$\{2\}$	$\{0\}$	$\emptyset$
$\{1,0\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{2\}$

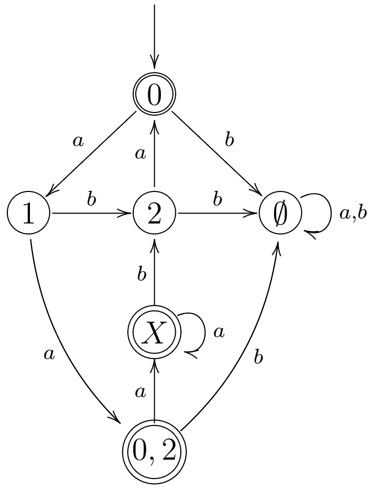
Wir bestimmen die Relationen $\not\sim_i$.

$\not\sim_0$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0,2\}$	$\{2\}$	$\{1,0\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0\}$		$\times$	$\times$		$\times$		
$\{1\}$	$\times$			$\times$		$\times$	$\times$
$\emptyset$	$\times$			$\times$		$\times$	$\times$
$\{0,2\}$		$\times$	$\times$		$\times$		
$\{2\}$	$\times$			$\times$		$\times$	$\times$
$\{1,0\}$		$\times$	$\times$		$\times$		
$\{0,1,2\}$		$\times$	$\times$		$\times$		

$\not\sim_1$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0,2\}$	$\{2\}$	$\{1,0\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0\}$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{1\}$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$\emptyset$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{0,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		
$\{2\}$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$\{1,0\}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		
$\{0,1,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		

$\not\sim_2$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{0,2\}$	$\{2\}$	$\{1,0\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0\}$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{1\}$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\emptyset$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\{0,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	$\times$
$\{2\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$\{1,0\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$\{0,1,2\}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		

Da $\not\sim_3 = \not\sim_2$ ist die Relation $\not\sim$ durch die Letzte Tabelle gegeben. Das heißt, dass wir die Zustände $\{1,0\}$ und $\{0,1,2\}$ identifizieren können (wir nennen den neuen Zustand X). Deshalb sieht der DFA minimaler Länge wie folgt aus:



(E5.3) [Reguläre Sprachen]

Für ein Wort $w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ wird w^{-1} durch $a_n \ldots a_1$ definiert (d.h. w wird rückwärts gelesen).

(i) Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache L auch die Umkehrung

$$\mathrm{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* \,:\, w \in L\}$$

regulär ist.

Hinweis: man kann sich zuerst überlegen, dass man aus einem NFA, der nur einen akzeptierenden Zustand hat, durch "Umkehrung" der Transitionen einen geeigneten NFA bekommen kann. Andere Fälle lassen sich dann mit den übrigen Abschlusseigenschaften darauf zurückführen. (Dies ist Übung 2.2.17 im Skript.)

(ii) Betrachte die Sprache $\textsc{Palindrom} = \{w \in \{a,b\}^* \,:\, w = w^{-1}\}$. Ist $\textsc{Palindrom}$ regulär? (Dies ist Übung 2.5.4 im Skript.)

Musterlösung.

(i) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ ein NFA. Für jedes $a \in A$ definieren wir

$$\mathcal{A}_a = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\}).$$

Das heißt: $\mathcal{A}_a$ ist wie $\mathcal{A}$, aber hat nur a als akzeptierenden Zustand. Wir haben $L(\mathcal{A}) = \bigcup_{a \in A} L(\mathcal{A}_a)$ und $\mathrm{rev}(L(\mathcal{A})) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{rev}(L(\mathcal{A}_a))^{-1}$. Weil reguläre Sprachen unter endliche Vereinigung abgeschlossen sind, brauchen wir nur einzusehen, dass $\mathrm{rev}(L(\mathcal{A}))$ regulär ist für jeden Automat $\mathcal{A}$ mit nur einem akzeptierenden Zustand.

Sei also $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\})$ ein NFA der eine Sprache L erkennt. Wir bestimmen einen Automat $\mathcal{A}^{\text{rev}}$, der genau $\text{rev}(L)$ erkennt:

$$\mathcal{A}^{\text{rev}} = (\Sigma, Q, a, \Delta^{\text{rev}}, \{q_0\}),$$

wobei

$$(q, x, q') \in \Delta^{\text{rev}} \Leftrightarrow (q', x, q) \in \Delta.$$

Man beweist jetzt mit Induktion über n, dass $(q_0, \ldots, q_n)$ eine Berechnung von $\mathcal{A}$ auf einem Wort $w = a_1 \ldots a_n$ ist, genau dann, wenn $(q_n, \ldots, q_0)$ eine Berechnung von $\mathcal{A}^{\text{rev}}$ auf dem Wort $w^{-1} = a_n \ldots a_1$ ist. Daraus folgt dann, dass $L(\mathcal{A}^{\text{rev}}) = L^{-1}$. Wir schliessen, dass auch L^{-1} regulär ist.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^n b a^n.$$

Offensichtlich ist x ein Palindrom. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w$ ein Palindrom ist. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ gleich $a^{n-k} b a^n$ ist mit $k > 0$, also kein Palindrom. Wir schliessen, dass die Sprache der Palindrome nicht regulär sein kann.

(E5.4) [Pumping Lemma]

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

(i) $L_1 = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \,:\, n \geqslant m\}$

(ii) $L_2 = \{a^{n!} \in \{a\}^* \,:\, n \geqslant 0\}$

(iii) $L_3 = \{a^p \in \{a\}^* \,:\, p \text{ prim}\}$

Musterlösung.

(i) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geqslant n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort

$$x = a^n b^n.$$

Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mehr b's (nämlich n) als a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir schliessen, dass L_1 nicht regulär ist.

(ii) Wir verwenden hier, dass

$$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = nn! > n,$$

falls $n > 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^{(n+1)!}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Klar ist, dass das für $n = 0, 1$ nicht geht. Nehmen wir darum an, dass $n > 1$. Dann ist v von der Form $v = a^k$ mit $0 < k \leqslant n$. Deshalb enthält $u \cdot w$ echt weniger als $(n+1)!$ Buchstaben, aber gleichzeitig echt mehr als $n!$ Buchstaben (weil $(n+1)! - k \geqslant (n+1)! - n > n!$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir schliessen, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

(iii) Sei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^l,$$

wobei $l > n+1$ eine Primzahl ist. Offensichtlich $x \in L_3$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Aus $|u \cdot v| \leqslant n$ und $|x| > n + 1$ folgt, dass $|w| > 1$. Wählen wir $m = |u| + |w| > 1$ und $x' = u \cdot v^m \cdot w$. Wir bestimmen die Länge von x':

$$|x'| = |u \cdot v^m \cdot w| = |u| + m|v| + |w| = m(|v| + 1).$$

Weil $m > 1$ und $|v| + 1 > 1$, ist $|x'|$ nicht prim. Das widerspricht $u \cdot v^m \cdot w \in L_3$. Wir schliessen, dass L_3 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.