Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

29. November, 2007

4. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E4.1) [Reguläre sprachen]

L und M seien Σ-sprachen.

(i) Zeigen Sie, dass $L \subseteq L^*$ und $L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*$. Schließen Sie hieraus, dass $L \subseteq M \Rightarrow L^* \subseteq M^*$ und $(L^*)^* = L^*$.

(ii) Zeigen Sie, dass
$$(L + M)^* = (L^*M^*)^*.$$

Musterlösung.

(i) Wir erinnern an die Definition des Sternoperators:
$$L^* = \{l_1 \cdot \ldots \cdot l_n : l_1, \ldots, l_n \in L, n \in \mathbb{N}\}.$$
Für $n = 0$, heißt das, dass $\varepsilon \in L^*$ und für $n = 1$, dass $L \subseteq L^*$.

Nehmen wir jetzt an, dass $L \subseteq M^*$, und sei $l \in L^*$. Das heißt, dass l sich schreiben lässt als $l = l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$ mit $l_1, \ldots, l_n \in L$. Da $L \subseteq M^*$ ist jedes l_i Element von M^* und kann deshalb als $l_i = m_i^1 \cdot \ldots \cdot m_i^{k_i}$ geschrieben werden. Deshalb ist
$$l = m_1^1 \cdot \ldots \cdot m_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_n^1 \cdot \ldots \cdot m_n^{k_n} \in M^*.$$
Wir schließen, dass $L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*$. Aus $L \subseteq M$ folgt deshalb, dass $L \subseteq M \subseteq M^*$ und $L^* \subseteq M^*$. Aus $L^* \subseteq L^*$ folgt $(L^*)^* \subseteq L^*$, und die andere Richtung $L^* \subseteq (L^*)^*$ ist ein Spezialfall von $M \subseteq M^*$ (mit $M = L^*$).

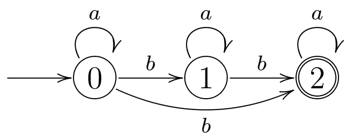
(ii) $(L + M)^* \subseteq (L^*M^*)^*$: es genügt zu beweisen, dass $L + M \subseteq L^*M^*$. Sei deshalb $w \in L + M$. Dann gilt $w \in L$ oder $w \in M$. Nehmen wir erst an, dass $w \in L$. Dann auch $w \in L^*$, und $w = w \cdot \varepsilon \in L^*M^*$. Der Fall $w \in M$ geht analog.

$(L^*M^*)^* \subseteq (L + M)^*$: es genügt zu beweisen, dass $L^*M^* \subseteq (L + M)^*$. Aus $L \subseteq L + M \subseteq (L + M)^*$ folgt, dass $L^* \subseteq (L + M)^*$. Analog gilt auch $M^* \subseteq (L + M)^*$, woraus $L^*M^* \subseteq (L + M)^*$ folgt. (Hier haben wir das folgende Prinzip verwendet:
$$L \subseteq N^*, M \subseteq N^* \Rightarrow LM \subseteq N^*.$$

Beweis: nehmen wir an $L \subseteq N^*$ und $M \subseteq N^*$, und sei $w \in LM$. Letztes heißt, dass $w = lm$ mit $l \in L$ und $m \in M$. Weil $L \subseteq N^*$ und $M \subseteq N^*$, können wir $l = n_1 \cdot \ldots n_j$ und $m = n'_1 \cdot \ldots n'_k$ schreiben mit $n_i, n'_i \in N$. Deshalb $w = n_1 \cdot \ldots n_j \cdot n'_1 \cdot \ldots n'_k \in N^*$.)

(E4.2) [Automaten]

(i) Welche Σ-Sprache mit $\Sigma = \{a, b\}$ wird von dem folgenden NFA $\mathcal{A}$ akzeptiert?



(ii) Beschreiben Sie $L(\mathcal{A})$ durch einen regulären Ausdruck.

Musterlösung.

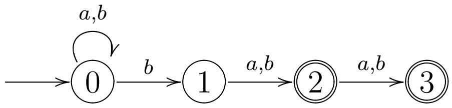
(i) $L(\mathcal{A})$ is die Menge von a/b-Folgen, die ein- oder zweimal b enthalten.

(ii)

$$a^*ba^* + a^*ba^*ba^*$$

(E4.3) [Automaten]

Betrachten Sie den folgenden NFA $\mathcal{A}$:



Geben Sie zu $\mathcal{A}$ einen DFA $\mathcal{A}^{\text{det}}$ an, der diegleiche Sprache akzeptiert.

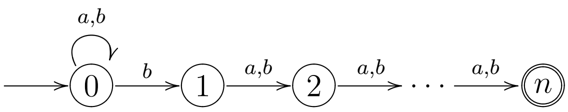
Musterlösung.

δ	a	b
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
$\{0,3\}$	$\{0\}$	$\{0,1\}$
$\{0,1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\{0,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$
$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

Die Zustände sind $\{0\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,1,2\},\{0,3\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{0,1,2,3\}$. Akzeptierend sind $\{0,2\},\{0,1,2\},\{0,3\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{0,1,2,3\}$.

(E4.4) [Automaten]

Betrachten Sie den folgenden NFA $\mathcal{A}_n$:



(i) Bestimmen Sie $L(\mathcal{A}_n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass es keinen äquivalenten DFA gibt mit weniger als 2^n-Zustände.

Musterlösung.

(i) $L(\mathcal{A}_n)$ is die Menge von a/b-Folgen, an deren n-ter Position vor dem Ende ein b steht.

(ii) Nehmen wir an, $\mathcal{Q}$ ist ein äquivalenter DFA mit weniger als 2^n-Zuständen. Dann gäbe es einen Zustand q und zwei verschiedene Zeichenreihen $x_1x_2\dots x_n$ und $y_1y_2\dots y_n$, sodass sich $\mathcal{Q}$ nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_n$ als auch von $y_1y_2\dots y_n$ im Zustand q befände („Schubfachprinzip").

Da die Zeichenreihen verschieden sind, müssen sie sich an einer bestimmten Position unterscheiden; sei $x_i \neq y_i$. Angenommen (auf Grund der Symmetrie ohne Beschränkung der Allgemeinheit), $x_i = b$ und $y_i = a$. Wenn $i = 1$, dann muss q sowohl ein akzeptierender Zustand als auch ein nicht akzeptierender Zustand sein, da $x_1x_2\dots x_n$ akzeptiert wird (das n-te Zeichen vor dem Ende ist b) und $y_1y_2\dots y_n$ nicht. Ist $i > 1$, dann betrachten wir den Zustand p, in den $\mathcal{Q}$ nach dem Einlesen sowohl von $x_1x_2\dots x_na^{i-1}$ als auch von $y_1y_2\dots y_na^{i-1}$ käme. Da $x_i = b$ und $y_i = a$, müsste $x_1x_2\dots x_na^{i-1}$ akzeptiert werden (das n-te Zeichen vor dem Ende ist $x_i = b$) und $y_1y_2\dots y_na^{i-1}$ nicht, d.h. p müsste ein akzeptierender und zugleich ein nicht akzeptierender Zustand sein.