Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21. November, 2008

3. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E3.1) [Induktion]

Begründen Sie das Prinzip der Wertverlaufsinduktion, indem Sie es auf die gewöhnliche vollständige Induktion zurückführen.

Musterlösung.

Wir nehmen an
$$(\forall n \in \mathbb{N})[(\forall m < n)A(m) \to A(n)] \tag{1}$$
und beweisen mit Induktion, dass $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, wobei
$$P(n) \equiv (\forall m < n)A(m).$$

Induktionsanfang: $(\forall m < 0)A(m)$ ist immer wahr (weil es eine universelle Quantifikation über die leere Menge ist!), also gilt $P(0)$.

Induktionsschritt: wir nehmen an $P(n)$, d.h., $(\forall m < n)A(m)$. Mit (1) folgt $A(n)$ und deshalb gilt auch $(\forall m < n+1)A(m)$. Damit ist $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ bewiesen.

Wir haben gezeigt, dass $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m < n)A(m)$, woraus natürlich $(\forall n \in \mathbb{N})A(n)$ folgt.

(E3.2) [Induktion]

Gegeben sei ein Schachbrett mit der Seitenlänge 2^n, von dem man ein beliebiges Feld entfernt hat, und eine Menge von L-förmigen Kartonstücken, die jeweils genau aus drei Feldern bestehen.

Zeigen Sie, dass man das Brett mit den Kartonstücken überdecken kann, ohne dass die Kartonstücke sich überlappen.

Musterlösung.

Induktionsanfang: die Aussage ist trivial wahr für $n = 0$. Man hat nämlich nichts mehr zu überdecken, falls man das einzige Feld entfernt das ein 1×1-Brett hat. (Die Aussage lässt sich auch für $n = 1$ einfach verifizieren, weil ein 2×2-Brett genau die L-Form hat, wenn man ein Feld entfernt.)

Induktionsschritt: wir nehmen an, die Aussage sei wahr für n. Betrachte ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Brett, wobei man ein beliebiges Feld entfernt hat, und zerteile das Brett in 4 Teile, die jeweils Seitenlänge 2^n haben.

Das entfernte Feld liegt in einem bestimmten Teil und wir entfernen (zeitweilig) in den anderen Teilen ein Feld, so dass die 3 Felder die wir jetzt (zeitweilig) entfernen, eine L-Form bilden. Nach Induktionsvoraussetzung, kann man jetzt die 4 Teile mit L-förmigen Kartonstücken überdecken. Setzen wir die 3 Felder jetzt wieder zurück, kann man auch die mit einer L-Form überdecken und damit haben wir das ganze $2^{n+1} \times 2^{n+1}$-Brett minus ein entferntes Feld überdeckt.

(E3.3) [Logik]

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion.

(i) Zeigen Sie, dass
$$(\exists x \in \mathbb{N})\,[\, f(f(x)+1) \neq x\,].$$

(ii) Geben Sie eine endliche Liste $t_1, \ldots, t_n$ von aus 0, f und $+1$ gebildete, Zahlen an, so dass für alle f
$$\bigvee_{i=1}^{n} [\, f(f(t_i)+1) \neq t_i\,]$$
gilt.

Musterlösung.

(i) Nehmen wir an, die Aussage sei falsch. Dann gilt für jede natürliche Zahl x, dass
$$f(f(x)+1) = x.$$
Dann muss einerseits f injektiv sein, weil $f(a) = f(b)$ impliziert, dass $f(f(a)+1) = f(f(b)+1)$ und $a = b$.

Andererseits muss $f \restriction \mathbb{N}_{>0}$ surjektiv sein und kann f deshalb nicht injektiv sein, weil der Wert $f(0)$ schon im Bild von $f \restriction \mathbb{N}_{>0}$ liegt.

(ii) Der Beweis kann auch so verstanden werden: wir versuchen ein x zu finden, so dass $f(f(x)+1) \neq x$.

Wir versuchen $f(0)$. Falls $f(f(f(0))+1) \neq f(0)$, dann sind wir erfolgreich mit $f(0)$. Falls $f(f(f(0))+1) = f(0)$, dann haben wir für $a = f(f(0))+1$ und $b = 0$, dass $f(a) = f(b)$. Ist $f(f(a)+1) \neq a$, dann sind wir erfolgreich mit a. Ist $f(f(b)+1) \neq b$, dann sind wir erfolgreich mit b. Ist sowohl $f(f(a)+1) = a$ und $f(f(b)+1) = b$ dann folgt aus $f(a) = f(b)$, dass $a = b$, also $f(f(0))+1 = 0$. Aber das ist unmöglich, weil $f(f(0))$ eine natürliche (nicht-negative) Zahl ist.

Also: $t_1 = f(0), t_2 = f(f(0))+1, t_3 = 0$.

(E3.4) [Reguläre Sprachen]

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(i) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Menge der Wörter über Σ beschreibt, worin auf jedes b direkt ein a folgt.

(ii) Beschreiben Sie umgangssprachlich, welche Wörter zu der Sprache gehören, die von dem folgenden regulären Ausdruck beschrieben wird:

$$(a+b)^*c(a+b)^* + (a+c)^*b(a+c)^* + (b+c)^*a(b+c)^*.$$

Musterlösung.

(i) $(a + c + ba)^*$.

(ii) Die Menge der Wörter, in denen es einen Buchstabe gibt, der genau einmal vorkommt.