Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Oktober, 2008

1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2007/2008

(E1.1) [Transitionssysteme]

Modellieren Sie einen Bahnübergang als endliches Transitionssystem.

Musterlösung.

Unterscheide z.B. die folgenden fünf Zustände:

$$\{\text{Licht aus} + \text{Schranke auf}, \text{gelbes Licht} + \text{Schranke auf}, \text{rotes Licht} + \text{Schranke zu}\}.$$

Im Normalbetrieb wechselt die Lichtzeichenanlage ihre Zustände in folgender Reihenfolge:

$$\text{aus} \rightarrow \text{gelb} \rightarrow \text{rot} \rightarrow \text{aus}.$$

(E1.2) [Transitionssysteme]

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

entsprechen.

(i) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(ii) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Musterlösung.

(i)

$$
\begin{tikzcd}
& 312 \arrow[r, dash, "3"] \arrow[dl, dash, "2"'] & 213 \arrow[dr, dash, "2"] & \\
132 \arrow[dr, dash, "3"'] & & & 123 \\
& 231 \arrow[r, dash, "2"'] & 321 \arrow[ur, dash, "3"'] &
\end{tikzcd}
$$

(ii)

$$
\begin{array}{rc}
0: & 1234 \\
1: & 2134, 3214, 4321 \\
2: & 3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341 \\
3: & 1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432 \\
4: & 4231, 2413, 3142
\end{array}
$$

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

(E1.3) [Mengen]

A, B seien Mengen. Durch

$$(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

wird eine binäre Mengenoperation erklärt.

Zeigen Sie, dass (A, B) die charakteristische Eigenschaft des (geordneten) Paares, d.h.

$$(A, B) = (C, D) \text{ gdw. } (A = C \text{ und } B = D)$$

erfüllt.

Schreiben Sie in der Sprache der Mengenlehre Formeln $\varphi(P, A)$ und $\psi(P, B)$ hin, die ausdrücken, dass A das erste Element vom Paar P, bzw. B das zweite Element vom Paar B ist.

Musterlösung.

Selbstverständlich gilt $\{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$, falls $A = C$ und $B = D$.

Umgekehrt, sei $\{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$. Weil $\{A\} \in \{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$, gilt entweder $\{A\} = \{C\}$ oder $\{A\} = \{C, D\}$. Aus $C \in \{C\}$ und $C \in \{C, D\}$ folgt deshalb, dass $C \in \{A\}$, d.h. $A = C$.

Aus $\{A, B\} \in \{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{C\}, \{C, D\}\}$ folgt entweder $\{A, B\} = \{C\}$ oder $\{A, B\} = \{C, D\}$. Da $B \in \{A, B\}$, folgt aus dem ersten Fall, dass $B = C$ und aus dem zweiten Fall dass, entweder $B = C$ oder $B = D$. Falls $B = D$ gilt sind wir fertig. Wir nehmen also an, dass $B = C = A$. Dann folgt, dass $\{\{C\}, \{C, D\}\} = \{\{A\}, \{A, B\}\} = \{\{A\}\}$ und deshalb $\{C, D\} = \{A\}$. Jetzt folgt $D \in \{A\}$ und deshalb $B = A = D$.

(Eine – vielleicht einfachere – Lösung fängt an mit einer Fallunderscheidung $A = B$ oder $A \neq B$.)

Die folgende Formel drückt aus, dass A das erste Element vom Paar P ist:

$$\forall X \in P\,(A \in X).$$

Die folgende Formel drückt aus, dass B das zweite Element vom Paar P ist:

$$\exists X \in P\,(B \in X) \wedge ((\exists X, Y \in P\,(X \neq Y)) \rightarrow (B \notin X \vee B \notin Y)).$$

(E1.4) [Formale Sprachen]

Für zwei Σ-Sprachen L_1, L_2 wird die Vereinigung definiert als $L_1 \cup L_2$ und die Konkatenation durch

$$L_1 \cdot L_2 := \{v \cdot w : v \in L_1, w \in L_2\}.$$

Wir schreiben üblicherweise L_1L_2 statt $L_1 \cdot L_2$. Zeigen Sie, dass

(i) $L(L_1 \cup L_2) = (LL_1) \cup (LL_2)$

(ii) $(L_1 \cup L_2)L = (L_1L) \cup (L_2L)$

Gelten ähnliche Aussagen mit dem Durchschnitt $\cap$ statt $\cup$?

Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $L_1L_2 = L_2L_1$ an.

Musterlösung.

(i) Wir beweisen: $l \in L(L_1 \cup L_2) \Leftrightarrow l \in (LL_1) \cup (LL_2)$.

$\Rightarrow$: Wenn l in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten ist, dann gilt $l = v \cdot w$, wobei v Element von L und w Element von L_1 oder von L_2 ist. Wenn w in L_1 enthalten ist, dann ist $v \cdot w$ in LL_1 enthalten und daher auch in $(LL_1) \cup (LL_2)$.

Ähnlich gilt: Wenn w in L_2 enthalten ist, dann ist $v \cdot w$ in LL_2 enthalten und daher auch in $(LL_1) \cup (LL_2)$.

$\Leftarrow$: Angenommen, l sei in $(LL_1) \cup (LL_2)$ enthalten. Dann ist l Element von LL_1 oder von LL_2. Sei zunächst l in LL_1. Dann ist $l = v \cdot w$, wobei v Element von L und w Element von L_1 ist. Da w Element von L_1 ist, ist w auch in $L_1 \cup L_2$ enthalten. Folglich ist $v \cdot w$ in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten. Die andere Möglichkeit ist, dass w in L_2 enthalten ist. Dann zeigt ein ähnliches Argument wie zuvor, dass l in $L(L_1 \cup L_2)$ enthalten ist.

(ii) Wie (i).

Die Aussage $L(L_1 \cap L_2) = (LL_1) \cap (LL_2)$ ist *nicht* richtig. Ein Gegenbeispiel wird gegeben durch: $\Sigma = \{a, b\}$, $L = \{a, aa\}$, $L_1 = \{b\}$ und $L_2 = \{ab\}$. Dann ist $L(L_1 \cap L_2)$ leer, und $LL_1 \cap LL_2 = \{aab\}$.

Ein Gegenbeispiel zu $L_1L_2 = L_2L_1$ wird gegeben durch: $\Sigma = \{a, b\}$, $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$.

(E1.5) [Relationen]

Sei R eine binäre Relation auf X, also $R \subseteq X \times X$.

Wir definieren (induktiv)

$$\begin{aligned} R^0 &:= \{(x, x) : x \in X\}, \\ R^{n+1} &:= \{(x, y) : \text{ es gibt ein } z \text{ mit } (x, z) \in R \text{ und } (z, y) \in R^n \}, \\ R^* &:= \bigcup_{n \geq 0} R^n. \end{aligned}$$

Ziegen Sie:

(i) R^* ist eine reflexive Relation.

(ii) R^* ist eine transitive Relation.

(iii) R^* umfasst R, d.h. $R \subseteq R^*$.

(iv) R^* ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst (d.h. falls R' reflexiv und transitiv ist mit $R \subseteq R'$, so gilt $R^* \subseteq R'$)

Musterlösung.

Bemerke dass:

> $(x, y) \in R^n$ genau dann, wenn es eine Reihe $z_0, \ldots, z_n$ gibt mit $x = z_0, y = z_n$ so dass $z_0Rz_1Rz_2R \ldots Rz_n$.

(i) R^* is reflexiv, denn $R^0 \subseteq R^*$.

(ii) Seien x, y, z mit xR^*y und yR^*z gegeben. Dann gibt es Zahlen i und j mit xR^iy und yR^jz. Dann gilt $xR^{i+j}z$ und damit xR^*z.

(iii) R^* umfasst R, denn $R = R^1 \subseteq R^*$.

(iv) Sei R' eine beliebige reflexive und transitive Relation, die R umfasst. Dann muss gelten: $R^0 \subseteq R'$, da R' reflexiv ist, und ferner $R = R^1 \subseteq R'$, da R' die Relation R umfasst. Da R' auch transitiv ist, folgt mit Induktion, dass $R^2, R^3, \ldots$ in R' enthalten sind. Also gilt $R^* \subseteq R'$. Damit ist gezeigt, dass R^* die *kleinste* solche Relation ist.