Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 30.1.2008

Analysis I für M, LaG/M, Ph

14. Tutorium

Wir wollen uns in diesem Tutorium mit den Begriffen „abzählbar“ und „überabzählbar“ beschäftigen. Zur Erinnerung: Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gibt, die surjektiv ist, d.h. es gilt $X = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Sie ist *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist.

(T 1)

Es sei A eine abzählbare Menge und $B \subseteq A$ nicht leer. Zeigen Sie, dass dann auch B abzählbar ist.

(T 2)

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Schritte:

(a) Begründen Sie warum es ausreicht, zu zeigen, dass die Menge aller positiven rationalen Zahlen abzählbar ist.

(b) Finden Sie eine Methode, wie man alle Brüche p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$ in einem quadratischen Raster: $\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$ anordnen kann.

(c) Beweisen Sie die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Nachfolgend präsentieren wir einen Beweis der Aussage:

Die Menge X aller Folgen mit Werten in $\{0,1\}$ ist überabzählbar.

Beweis: Wir nehmen an X wäre abzählbar unendlich, d.h. $X = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, wobei $f_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots)$ und $a_{jk} \in \{0,1\}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$.
Wir definieren nun eine Folge in $\{0,1\}$ wie folgt:

$$a_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{jj} = 0, \\ 0, & \text{falls } a_{jj} = 1 \end{cases}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in X, also gibt es nach Annahme ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} = f_{m_0}$ gilt. Das heißt aber, dass $a_{m_0} = a_{m_0 m_0}$ ist, ein Widerspruch, denn wir haben die Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gerade so konstruiert, dass dies nicht gilt. $\square$

Bemerkung: Das hier verwendete Beweisverfahren heißt *Cantorsches Diagonalverfahren*.

(T 3)

Verwenden Sie das Cantorsche Diagonalverfahren, um zu zeigen, dass das Intervall $[0,1)$ (und damit auch ganz $\mathbb{R}$) überabzählbar ist.