**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 16.1.2008

# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## 12. Tutorium

### (T 1)

Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $g$ auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, bestimmen Sie $g^{(n)}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Taylorreihe von $g$ im Nullpunkt. Gilt $\lim_{n\to\infty}(R_n g)(x, 0) = 0$ in einer Umgebung von 0?

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle globalen und lokalen Extrema von $g$, berechnen Sie weiter

$$\lim_{x\to\infty} g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

und fertigen Sie damit eine Skizze des Graphen von $g$ an.

### (T 2)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion $f$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, so ist auch die Funktionenfolge $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent und ihre Grenzfunktion ist $\varphi \circ f$.

### (T 3)

Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\mathrm{e} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$$

und berechnen Sie damit

$$\lim_{n\to\infty} \big(n!\,\mathrm{e} - [n!\,\mathrm{e}]\big),$$

wobei $[\cdot]$ wieder die Gaußklammer bezeichnet.