Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 19.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

10. Tutorium

(T 1)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x\,(x-2)^5}{\mathrm{e}^{2x}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \log x, \quad \alpha > 0.$

(T 2)

Es seien X, Y zwei nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *topologisch* oder *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und f und f^{-1} beide stetig sind.

Zeigen Sie, dass aus X kompakt und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig schon folgt, dass f topologisch ist.

(T 3)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, wenn $M^T = M^{-1}$ gilt, wobei M^T die transponierte Matrix von M bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Menge $O(n)$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. (Hierbei identifizieren wir eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mit dem Vektor $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.)

Hinweis: Betrachten Sie für alle $1 \le j \le n$ und $1 \le k \le n$ die Abbildung $f_{jk} : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f_{jk}(M) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} a_{\ell k}$$

für $M = (a_{jk})_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben ist.