Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 12.12.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

9. Tutorium

(T 1)

Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. $f(x) = 0 \implies x = 0$.
2. $f(tx) = t^m f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$.

Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$|f(x)| \geq C|x|^m, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Betrachten Sie f auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ und verwenden Sie Theorem III.3.9.

Ein Exkurs über b-adische Entwicklungen:

Vorbemerkung: Für jedes $y \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir wieder mit $[y]$ die Gaußklammer von y, also das eindeutige $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq y < n + 1$.

Für alle folgenden Betrachtungen fixieren wir eine natürliche Zahl $b \geq 2$ und ein $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < 1$. Damit definieren wir $d_1 = [bx]$, so dass $d_1 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq d_1 < b$ ist, und setzen $x_1 = d_1/b$. Damit haben wir $0 \leq x - x_1 < 1/b$. Wir gehen weiter rekursiv vor: Gehen wir davon aus, dass wir bereits natürliche Zahlen $d_1, \dots, d_k$ and reelle Zahlen $x_1, \dots, x_k$ mit $0 \leq x - x_k < b^{-k}$ definiert haben, so setzen wir $d_{k+1} = [b^{k+1}(x - x_k)]$ und $x_{k+1} = x_k + d_{k+1}b^{-k-1}$. Auf diese Weise erhalten wir eine rekursiv definierte Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $0 \leq x - x_n < b^{-n}$ gilt. Außerdem ist jedes d_n ein Element von $\{0, 1, \dots, b-1\}$ und $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{b^i}$. Ist nun $x = x_n$ für ein gewisses n, dann folgt $d_m = 0$ für alle $m > n$.
Wir schreiben symbolisch

$$x = 0.d_1 d_2 \dots,$$

wobei jedes d_j eine natürliche Zahl mit $0 \leq d_j < b$ ist, und meinen damit, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = d_1 b^{-1} + \dots + d_k b^{-k}$ gegen x konvergiert. Man nennt das eine Darstellung von x zur Basis b, oder auch b-adische Entwicklung von x.

Im geläufigsten Fall $b = 10$ spricht man von einer Dezimaldarstellung, im Fall $b = 2$ von einer Binärdarstellung und im Fall $b = 3$ von einer Ternärdarstellung.

Mit obiger Konstruktion zeigt man, dass jedes $x \in [0, 1)$ eine Darstellung in jeder Basis $b \geq 2$ hat. Ist $x = 1$, so kann man $d_j = b - 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ setzen und erhält mit der Formel für die geometrische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{b^j} = 1$. Weiter beobachten wir, dass es für rationale Zahlen $x \in [0, 1)$, die von der Form p/b^n für geeignete $p, n \in \mathbb{N}$ sind, zwei verschiedene Darstellungen in der Basis b gibt: $0.d_1 d_2 \dots d_n 000 \dots$ und $0.d_1 d_2 \dots (d_n - 1)(b - 1)(b - 1)(b - 1) \dots$, z.B. gibt es für $b = 10$ und $x = 1/2$ die beiden Darstellungen $0.5000\ldots$ und $0.4999\ldots$. Natürlich ist uns die erste der beiden lieber und die oben angegebene Konstruktion erzeugt auch immer die ‚abbrechende' Version, wenn es diese Wahlmöglichkeit gibt. Wir bemerken abschließend ohne Beweis, dass die Darstellung eindeutig ist, wann immer $x \in [0,1]$ nicht von der Form p/b^n ist.

(Dieser Text basiert auf der Darstellung in: A. Browder, Mathematical Analysis; An Introduction.)

(T 2)

Es sei C die in Aufgabe (G2) auf Übungsblatt 8 eingeführte Cantormenge.

(a) Beweisen Sie, dass jeder Punkt in C ein Häufungspunkt von C ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x \in [0,1]$ genau dann in C liegt, wenn

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad \text{mit } a_n = 0 \text{ oder } a_n = 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, d.h. wenn in der 3-adischen Darstellung von x nur die Ziffern 0 und 2 vorkommen.

(c) Sei nun $x \in C$ in der Summendarstellung aus (b) gegeben. Dann definieren wir die Funktion

$$\phi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\phi : C \to [0,1]$ surjektiv, monoton und stetig ist.

(ii) Beweisen Sie, dass ϕ eine stetige Fortsetzung $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt, die auf jedem offenen Intervall in $[0,1] \setminus C$ konstant ist.

Bemerkung: Diese Funktion f wird *Cantorfunktion* und manchmal auch *Teufelstreppe* genannt.

(iii) Versuchen Sie f zu skizzieren.