Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 28.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

7. Tutorium

(T 1)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ den Konvergenzradius ∞ hat.

(b) Wir setzen $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $s \in (0, r)$ eine Konstante $M(s) > 0$ existiert mit

$$|f(z)| \leq M(s) \exp(|z|/s).$$

(T 2)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass es dann ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) > 0$ auch für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

(T 3)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0) = 1$ und es gelte $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.