Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 21.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

6. Tutorium

(T 1)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren. Welche der Reihen ist absolut konvergent?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$.

(T 2)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Weiter sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Folgt daraus, dass auch die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

konvergieren?

(T 3)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir definieren

$$d_n := n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Beweisen Sie:

(a) *Raabes Kriterium:* Existieren $N_0 \in \mathbb{N}$ und $\beta > 1$, so dass $d_n \geq \beta$ für alle $n \geq N_0$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$(\beta - 1)a_n \leq (n-1)a_n - na_{n+1}, \quad \text{für } n \geq N_0$$

gilt.

(b) Die Voraussetzung des Quotientenkriteriums impliziert die Voraussetzung von Raabes Kriterium. Mit anderen Worten: Liefert die Anwendung des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so lässt sich auch aus Raabes Kriterium die Konvergenz folgern.