Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 14.11.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

5. Tutorium

(T 1) (Babylonisches Wurzelziehen)

Für $a \geq 1$ betrachten wir die Funktion

$$f : [1, a] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{a}$ ein Fixpunkt dieser Funktion ist und bestimmen Sie den Wert von $\sqrt{2}$ mit einer Abweichung von höchstens $3 \cdot 10^{-3}$ genau (Hierbei genügt nicht der Vergleich mit einem Taschenrechner-Ergebnis, gesucht ist ein Beweis dafür, dass der erhaltene Wert die gewünschte Genauigkeit besitzt, der ohne das Wissen um den realen Wert auskommt).

(T 2)

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie: Setzt man $b_n := \sup\{a_j : j \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, konvergent und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{j\geq n} a_j.$$

Bemerkung: Analog kann man auch die Beziehung

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{j\geq n} a_j$$

beweisen. Beide Formeln motivieren die Bezeichnungen lim inf und lim sup und werden auch häufig zur Definition dieser Größen verwendet.

(T 3)

(a) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=11}^{23} \sum_{j=0}^{2007} \binom{2007}{j} (-1)^{j+1} k^j \cdot 9^{2007-j} - \sum_{\ell=1}^{14} \ell^{2007}$.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \lambda_3 a_{n+3}) = \lambda_1 a_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) a_2.$$