**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 7.11.2007

# Analysis I für M, LaG/M, Ph

## 4. Tutorium

**(T 1)**

Es seien $X$ und $Y$ Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$.

(a) Zeigen Sie $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) Zeigen Sie $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

**(T 2)**

Entscheiden Sie jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel), ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

(a) $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$, (b) $|a_n| < 2\varepsilon^4$, (c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$,

(d) $|a_n^2 + a_n| < \varepsilon$, (e) $|a_n \cdot a_{n+m}| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

**(T 3)**

(a) Beweisen Sie den *Sandwichsatz*:

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reelle Folgen. Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ für alle } n \geq n_0$$

gilt, so ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Satzes den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}.$$