Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Hieber
Robert Haller-Dintelmann
Horst Heck

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08 24.10.2007

Analysis I für M, LaG/M, Ph

2. Tutorium

(T 1)

Es seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{m}(1+a_i) > 2^n, \qquad \text{so folgt} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i > n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(1+k) \leq 2^k$, für $k \in \mathbb{N}$.

(T 2)

Beispiel:

Finden Sie eine Formel für die folgende Summe:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) \quad (= 1+3+5+7+\ldots+(2n+1)).$$

Lösung: Sei $a_k = k^2$ für $k = 0,1,2,3,\ldots$. Dann gilt $a_1 - a_0 = 1^2 - 0^2 = 1$, $a_2 - a_1 = 2^2 - 1^2 = 3$, $a_3 - a_2 = 3^2 - 2^2 = 5$, $a_4 - a_3 = 4^2 - 3^2 = 7$ und $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$.

Nach Summieren erhalten wir $1+3+5+7+\ldots+(2n+1) = a_{n+1} - a_0 = (n+1)^2$.

Finden Sie Formeln für die folgenden Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \quad (= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n\cdot(n+1));$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad (= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)\,.$$

Hinweis: $a_k = k^3$.

(T 3)

Leiten Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$ aus den Axiomen her:

(a) Aus $n, m \in \mathbb{N}_0$ folgt:

$$n+m,\ m\cdot n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert **kein** $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m < n+1$.

(c) Jede nichtleere Menge M natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element.