4 Uneigentliche Integrale

Mit unserem bisherigen Integralbegriff konnten wir sprungstetige Funktionen, welche auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ definiert sind, integrieren. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Integralbegriff nun auf beliebige Intervalle der reellen Achse ausdehnen; dies führt uns zum Begriff des uneigentlichen Integrals.
Während des gesamten Abschnitts gelte $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Wir nennen eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ *zulässig*, falls die Einschränkung von f auf jedes beliebige kompakte Teilintervall von (a, b) sprungstetig ist. Es ist klar, dass eine stetige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ zulässig ist, ebenso ist $f \in \mathcal{S}[a, b]$ zulässig, falls $a, b \in \mathbb{R}$ sind, und $|f| : (a, b) \to \mathbb{K}$ ist zulässig, falls f zulässig ist.

4.1 Definition. Eine zulässige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ heißt *uneigentlich integrierbar*, falls eine Konstante $c \in (a, b)$ existiert, derart dass die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{c} f \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \to b-0} \int_{c}^{\beta} f$$

existieren.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass für eine uneigentlich integrierbare Funktion f die obigen Grenzwerte für alle $c \in (a, b)$ existieren.

4.2 Definition. Es seien $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ uneigentlich integrierbar und $c \in (a, b)$. Dann heißt

$$\int_a^b f \, dx := \int_a^b f(x) \, dx := \lim_{\alpha \to a+0} \int {}_{\alpha}^{c} f + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^{\beta} f$$

das *uneigentliche Integral* von f über (a, b).

4.3 Beispiele. a) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ existiert } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Um dies einzusehen, wählen wir $\alpha \neq 1$. Dann gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1),$$

und das obige Integral konvergiert für $b \to \infty$ genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.
Falls $\alpha = 1$ ist, so gilt $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b$, welches bedeutet das der Grenzwert $\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$ nicht existiert.
b) Analog beweist man die folgende Aussage:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ existiert } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

c) Es gilt
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$
denn die Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist gegeben durch $x \mapsto \arctan x$ und es gilt $\lim_{b\to\infty} \arctan\big|_0^b = \frac{\pi}{2}$.
d) Für $\alpha > 0$ gilt
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha},$$
denn es ist $\int_0^R e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$.

4.4 Satz. (Vergleichssatz Integral-Reihe). *Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine zulässige und monoton fallende Funktion. Dann gilt*
$$\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty \Longleftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx \quad \textit{existiert.}$$

Beweis. Für $x \in [n-1, n]$ und $n \geq 2$ gilt nach Voraussetzung $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$. Deswegen ist $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1)$ und somit gilt
$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n), \quad N \geq 2.$$
Daher gilt
$$\int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$$
und somit existiert $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)dx$, falls die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert.
Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, notieren wir, dass nach Voraussetzung
$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \int_1^\infty f(x)dx < \infty$$
gilt. Daher ist $(\sum_{n=1}^N f(n))_{N\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge, also ist $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergent.

$\square$

Betrachten wir speziell die Funktion $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ so gilt
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist konvergent } \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \text{ existiert } \overset{4.3}{\Leftrightarrow} \alpha > 1.$$

4.5 Definition. Eine zulässige Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ heißt *absolut integrierbar*, falls $\int_a^b |f(x)|dx$ existiert.

4.6 Lemma. *Eine absolut integrierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{K}$ ist integrierbar.*

Für den Beweis verweisen wir auf die Übungen.

4.7 Satz. (Majorantenkriterium für Integrale). *Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zulässige Funktionen, derart dass*

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \in (a, b)$$

gilt. Ist g integrierbar, so ist f absolut integrierbar.

Für den Beweis verweisen wir wiederum auf die Übungen.

4.8 Beispiel. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

ist konvergent, aber *nicht* absolut konvergent.
Um dies einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ gilt, der Integrand auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist und dass es daher genügt die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ zu untersuchen. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Das Integral $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ existiert, da es die konvergente Majorante $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ besitzt. Dies bedeutet, dass der Grenzwert

$$\lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert.
Andererseits konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ *nicht* absolut, denn für jedes $k \, in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

und somit ist

$$\int_0^{(k+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n+1}.$$

Letzterer Ausdruck ist gerade die harmonische Reihe, so dass der obige Grenzwert für $k \to \infty$ nicht existiert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch die sogenannte Gamma- und Betafunktion. Beide Funktionen sind durch uneigentliche Integrale definiert und stellen wichtige Funktionen der Analysis dar.

4.9 Beispiel. (Die Gamma-Funktion).
Wir beginnen mit der Definition der *Gammafunktion.* Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$ definieren wir

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Diese Funktion wurde von Euler eingeführt mit dem Ziel die für $n \in \mathbb{N}$ definierte Fakultätsfunktion $n \mapsto n!$ zu interpolieren. Wir bemerken zunächst, dass die Gammafunktion wohldefiniert ist. Für $t \in (0,1]$ folgt dies aus der Abschätzung

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t} \leq t^{\operatorname{Re} z-1},$$

da damit nach Beispiel 4.3b) und Satz 4.7 das Integral $\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ absolut konvergiert. Für $t \in [1,\infty)$ gilt

$$|t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t}| \leq C_z e^{-t/2}$$

für eine von z abhängige Konstante C_z. Da nach Beispiel 4.3 d) das Integral $\int_1^\infty e^{-t/2}dt$ existiert, ist das Integral $\int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}$ absolut konvergent.
Die so definierte Gamma-Funktion $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \to \mathbb{C}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:
a) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$
b) $\Gamma(1) = 1$
c) $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$.
Um die Eigenschaft a) einzusehen, integrieren wir partiell. Genauer gesagt gilt

$$\underbrace{\int_a^b t^z e^{-t} dt}_{\to\Gamma(z+1) \text{ für } b\to\infty\ a\to 0} = \underbrace{-t^z e^{-t}\,|_a^b}_{\to 0 \text{ für } b\to\infty\ a\to 0} + \underbrace{z\int_a^b t^{z-1}e^{-t}dt}_{\to z\,\Gamma(z) \text{ für } b\to\infty\ a\to 0}, \quad 0 < a < b < \infty.$$

Daher gilt $\Gamma(z+1) = z$ für $\operatorname{Re} z > 0$.
Die Eigenschaft b) folgt unmittelbar aus Beispiel 4.3 d). Ebenso folgt die Eigenschaft c) durch wiederholtes Anwenden von a) in Verbindung mit b).
In vielen Anwendungen ist eine näherungsweise Berechnung von $\Gamma(x)$ bzw. von $n!$ für große Werte von x bzw. n von Bedeutung. Von besonderem Interesse ist die *Stirlingsche Formel* , welche besagt, dass für $x > 0$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x+\mu(x)}, \quad \text{mit } 0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}$$

gilt. Daher wird häufig der Wert $\sqrt{2\pi}x^{x-1/2}e^{-x}$ als Näherungswert für $\Gamma(x)$ herangezogen. Der relative Fehler der Approximation beträgt $e^{-12x} - 1$ und ist schon für $x > 10$ kleiner als ein Prozent.

4.10 Beispiel. (Die Beta-Funktion)
Eine weitere wichtige Funktion welche durch ein uneigentliches Integral definiert ist, ist die sogenannte *Beta-Funktion* . Sie ist für $p, q \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$ definiert durch

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

Das obige Integral ist absolut konvergent. (vgl. Übungsaufgaben) und somit ist $B(p,q)$ wohldefiniert. Ferner gilt die Beziehung

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p,q), \quad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0.$$