

Skriptum zur Vorlesung

# Analysis I

Wintersemester 2007/08

Matthias Hieber  
Fachbereich Mathematik  
TU Darmstadt

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Grundlegendes über Zahlen</b>	<b>1</b>
1	Die reellen Zahlen . . . . .	1
2	Die komplexen Zahlen . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Konvergenz von Folgen und Reihen</b>	<b>15</b>
1	Konvergenz von Folgen . . . . .	15
2	Der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	25
3	Unendliche Reihen . . . . .	32
4	Umordnung und Produkte von Reihen . . . . .	42
5	Potenzreihen . . . . .	48

# I Grundlegendes über Zahlen

## 1 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen? Dies ist – je nach Standpunkt – eine mehr oder weniger schwierige Frage. Im Folgenden beschreiben wir die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen durch Regeln, welche festlegen wie man mit diesen Zahlen „rechnen“ darf. Diese Regeln nennen wir das *Axiomensystem der reellen Zahlen*. Genauer gesagt, besteht dieses aus den folgenden

- Körperaxiomen, den
- Anordnungsaxiomen sowie dem
- Vollständigkeitsaxiom.

Alle Aussagen dürfen ausschließlich aus diesen Axiomen abgeleitet werden. Wir beginnen mit den Körperaxiomen.

### 1.1. Die Körperaxiome.

Auf der Menge  $\mathbb{R}$  seien zwei Verknüpfungen, die *Addition* „+“, sowie die *Multiplikation* „ $\cdot$ “ erklärt:

$$\begin{aligned} \text{Addition:} \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto x + y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation:} \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

Diese erfüllen die folgenden Körperaxiome:

### Axiome der Addition

- (A1) *Kommutativgesetz*: für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $x + y = y + x$ .
- (A2) *Assoziativgesetz*: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
- (A3) *Existenz eines neutralen Elements*: Es existiert  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $x + 0 = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (A4) *Existenz eines inversen Elements*: Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert  $-x \in \mathbb{R}$  mit  $x + (-x) = 0$ .

### Axiome der Multiplikation

- (M1) *Kommutativgesetz*: für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt  $x \cdot y = y \cdot x$ .
- (M2) *Assoziativgesetz*: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .
- (M3) *Existenz eines neutralen Elements*: es existiert  $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$ , mit  $x \cdot 1 = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (M4) *Existenz eines inversen Elements*: für jedes  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq 0$  existiert  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  mit  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

Das folgende Distributivgesetz besagt wie Addition und Multiplikation kombiniert werden dürfen.

- (D) *Distributivgesetz*: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ .

Eine Menge  $\mathbb{K}$  von Elementen  $a, b, \dots$  für die eine additive Verknüpfung  $a + b$  und eine multiplikative Verknüpfung  $a \cdot b$  definiert ist, welche obigen Eigenschaften genügt, nennt man einen *Körper*. In der Vorlesung Lineare Algebra werden Körper und deren Axiome in wesentlich größerer Ausführlichkeit behandelt. Wir bemerken an dieser Stelle nur, dass die Elemente 0 und 1 eindeutig bestimmt sind und dass die Aussage  $x \cdot y = 0$  impliziert, dass  $x = 0$  oder  $y = 0$  gilt. Wir führen noch folgende vereinfachenden Schreibweisen ein:

$$xy := x \cdot y, \quad \frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}, \quad x - y := x + (-y), \quad x^2 := x \cdot x, \quad 2x := x + x.$$

### 1.2. Die Anordnungsaxiome.

In  $\mathbb{R}$  sind gewisse Zahlen als *positiv* ausgezeichnet ( $x > 0$ ), so dass gilt:

(01) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt genau eine der Beziehungen  $x = 0$ ,  $x > 0$ ,  $-x > 0$ .

(02) Sind  $x > 0$  und  $y > 0$ , so folgt  $x + y > 0$ .

(03) Sind  $x > 0$  und  $y > 0$ , so folgt  $x \cdot y > 0$ .

Das zweite Axiom besagt die *Verträglichkeit mit der Addition*, das dritte die *Verträglichkeit mit der Multiplikation*. Die folgende Definition ermöglicht es, beliebige Elemente von  $\mathbb{R}$  zu vergleichen.

**1.3 Definition.** Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} x > y & :\Leftrightarrow x - y > 0 \\ x \geq y & :\Leftrightarrow x - y > 0 \text{ oder } x - y = 0. \end{aligned}$$

Ein Element  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0$  heißt *positiv*. Für  $x > y$  und  $x \geq y$  schreibt man auch  $y < x$  bzw.  $y \leq x$ . Gilt  $x < 0$ , so heißt  $x$  *negativ*.

**1.4. Rechenregeln.** Es seien  $x, y, z, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Es gilt genau eine der Beziehungen  $x = y$ ,  $x < y$  oder  $x > y$  (*Trichotoniegesetz*).

b) Ist  $x < y$  und  $y < z$ , so gilt  $x < z$  (*Transitivität*).

c) Ist  $x < y$  und  $\alpha \leq \beta$ , so gilt  $x + \alpha < y + \beta$  (*Monotonie der Addition*).

d) Ist  $x < y$ , so gilt  $-x > -y$ .

e) Ist  $x < y$  und  $\alpha > 0$ , so gilt  $\alpha x < \alpha y$  (*Monotonie der Multiplikation*).

f) Für  $x \neq 0$  gilt  $x^2 > 0$ , insbesondere ist  $1 > 0$ .

g) Ist  $0 < x < y$ , so gilt  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ .

h) Ist  $x < y$ , so folgt  $x < \frac{x+y}{2} < y$  (*Arithmetisches Mittel*).

*Beweis.* a) folgt direkt aus der Definition 1.3 und dem Anordnungsaxiom (01).

b) Nach Definition 1.3 gilt  $y - x > 0$  und  $z - y > 0$ . Das Anordnungsaxiom (02) impliziert, dass  $z - x = (y - x) + (z - y) > 0$  ist; also gilt  $z > x$  und somit  $x < z$ .

c)-e) Übungsaufgaben.

f) Sei zunächst  $x > 0$ . Dann gilt  $x \cdot x = x^2 > 0$  wegen (03). Ist  $x < 0$ , so impliziert die Aussage d), dass  $-x > 0$  ist und daher gilt  $(-x)(-x) = x^2 > 0$  nach (03).

g) Da  $x > 0$  und  $(x^{-1})^2 > 0$  ist, gilt  $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$  und analog  $y^{-1} > 0$ . Also ist  $x^{-1} \cdot y^{-1} > 0$ . Die Voraussetzung  $0 < x < y$  impliziert nun  $y^{-1} = x \cdot (x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1}$ .

h) Übungsaufgabe

□

Die Körper- und Anordnungsaxiome implizieren, dass es außer 0 und 1 noch weitere Zahlen in  $\mathbb{R}$  gibt. Addiert man in der Ungleichung  $0 < 1$  auf beiden Seiten 0, bzw. 1, so erhalten wir  $0 + 0 = 0 < 1 + 0 = 1$ ,  $1 < 1 + 1 = 2$ , also  $2 \neq 0$ ,  $2 \neq 1$ .

**1.5 Definition.** (Absolutbetrag). Es sei  $x \in \mathbb{R}$ . Wir definieren den *Betrag von  $x$*  als

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

**1.6 Bemerkungen.** Für den Absolutbetrag gelten die folgenden Rechenregeln:

- a) Es gilt  $|x| \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- b)  $|-x| = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- c)  $||x|| = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- d)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$
- e)  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ ,  $x \in \mathbb{R}, y \neq 0$
- f)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  (Dreiecksungleichung)
- g)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  (umgekehrte Dreiecksungleichung)

*Beweis.* a) b) c) d) e) g) als Übungsaufgaben. Zu f): es seien  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $x \leq |x|$ ,  $y \leq |y|$  sowie  $-x \leq |x|$  und  $-y \leq |y|$ . Die Monotonie der Addition 1.4 c) ergibt  $-x - y \leq |x| + |y|$ , sowie  $x + y \leq |x| + |y|$ . Deshalb gilt  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .  $\square$

Wir betrachten nun die natürlichen Zahlen als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  und beginnen mit der folgenden Definition.

**1.7 Definition.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt *induktiv*, *indexinduktiv* falls gilt:

- a)  $0 \in M$
- b)  $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$ .

Klarerweise ist die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  induktiv. Definieren wir  $M := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ , so ist  $M$  ebenfalls induktiv, sofern  $a \leq 0$  gilt.

**1.8. Satz und Definition.** *Es existiert eine kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Diese heißt die Menge der natürlichen Zahlen und wird mit  $\mathbb{N}_0$  bezeichnet.*

*Beweis.* Setze  $\mathbb{N}_0 := \bigcap_{M \text{ induktiv, } M \subset \mathbb{R}} M$ , d.h. mit anderen Worten,  $\mathbb{N}_0$  ist die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Daher gilt  $0 \in \mathbb{N}_0$ , da  $0 \in M$  für alle induktiven Mengen  $M \subset \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ferner sei } x \in \mathbb{N}_0 &\Rightarrow x \in M \text{ für alle induktiven Teilmengen } M \subset \mathbb{R} \\ &\Rightarrow x + 1 \in M \text{ für alle induktiven Teilmengen } M \subset \mathbb{R} \\ &\Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathbb{N}_0$  induktiv und da  $\mathbb{N}_0 \subset M$  für alle induktiven Mengen  $M \subset \mathbb{R}$  gilt, ist  $\mathbb{N}_0$  die kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

**1.9 Korollar.** (Induktionssatz). *Es sei  $N \subset \mathbb{N}_0$  eine Menge mit folgenden Eigenschaften:*

- a)  $0 \in N$
- b)  $x \in N \Rightarrow x + 1 \in N$ .

*Dann ist  $N = \mathbb{N}_0$ .*

Der Beweis ist klar, da  $\mathbb{N}_0$  die kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Damit können wir die *Beweismethode der vollständigen Induktion* betrachten.

**1.10 Satz.** *Für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  sei eine Aussage  $A(n)$  definiert. Es gelte:*

- a)  $A(0)$  ist richtig (Induktionsanfang).
- b) Falls  $A(n)$  richtig ist, so folgt, dass  $A(n + 1)$  richtig ist (Induktionsschritt).

*Dann gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

Der Beweis ist einfach. Wir setzen  $N := \{n \in \mathbb{N}_0 : A(n) \text{ ist wahr}\}$ . Dann ist  $N \subset \mathbb{N}_0$  induktiv und Korollar 1.9 impliziert, dass  $N = \mathbb{N}_0$  gilt.

**1.11 Beispiele.**

- a) *Die Bernoullische Ungleichung.*  
Es sei  $x > -1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

b) *Geometrische Reihe*: Es seien  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q \neq 1$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Beweis. Induktionsanfang*:  $A(0)$  ist richtig, denn  $q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = 1$ .

*Induktionsschritt*: Nach Voraussetzung ist  $A(n)$  richtig. Also gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{q^0 + q^1 + \dots + q^n}_{\text{Vor.}} + q^{n+1} &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

Also gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**1.12 Satz.** (Eigenschaften von  $\mathbb{N}_0$ ). *Es gelten die folgenden Aussagen:*

a)  $0 \in \mathbb{N}_0$  und  $1 \in \mathbb{N}_0$

b)  $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n = 0$  oder  $n \geq 1$

c)  $n, m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n + m \in \mathbb{N}_0$  und  $n \cdot m \in \mathbb{N}_0$

d)  $n, m \in \mathbb{N}_0, n \geq m \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}_0$

e) Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Es existiert kein  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $n < m < n + 1$ .

f) Jede nichtleere Menge  $M$  natürlicher Zahlen besitzt ein kleinstes Element; mit anderen Worten sei  $M \neq \emptyset$  und  $M \subset \mathbb{N}_0$ . Dann existiert  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \leq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* a) Es gilt  $0 \in \mathbb{N}_0$  nach Definition und  $\mathbb{N}_0$  ist induktiv. Also gilt  $0 + 1 = 1 \in \mathbb{N}_0$ .

b) Setze  $B := \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}_0 : n - 1 \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n - 1 \geq 0\} \subset \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $B$  induktiv. In der Tat ist  $0 \in B$ . Ferner sei  $n \in B$ . Es ist zu zeigen, dass  $n + 1 \in B$ . Falls  $n = 0$ , so folgt  $n + 1 = 1 \in B$ . Falls  $n \neq 0$ , so folgt  $0 \leq n - 1$ . Daher ist  $0 < 1 \leq n = (n + 1) - 1 \in \mathbb{N}_0$  und somit  $n + 1 \in B$ . Also gilt  $B = \mathbb{N}_0$  und somit die Behauptung.

c) d) e) f) als Übungsaufgaben.

□

**1.13 Satz.** (Eine Variante des Induktionsprinzips). Für  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  gelte

a)  $A(n_0)$  richtig.



b)  $A(n_0), A(n_0 + 1), \dots, A(n)$  richtig  $\Rightarrow A(n + 1)$  richtig.

Dann ist  $A(n)$  für alle  $n \geq n_0$  wahr.

Auf diese Weise kann man zum Beispiel zeigen, dass  $2^n > n^2$  für alle  $n \geq 5$  gilt.

**1.14. Beispiele zur Induktion.** Wir betrachten zunächst *rekursive Definitionen*:

a) *Potenz*: Für  $x \in \mathbb{R}$  setze

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1 \\ x^{n+1} &:= x \cdot x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

b) *Fakultät*:

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ (n+1)! &:= (n+1) \cdot n!, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

c) *Endliche Summen und Produkte*:

Es seien  $a_j \in \mathbb{R}$  für  $j \in \mathbb{N}_0$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^0 a_j &:= a_0, & \sum_{j=0}^{n+1} a_j &:= a_{n+1} + \sum_{j=0}^n a_j, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \prod_{j=0}^0 a_j &:= a_0, & \prod_{j=0}^{n+1} a_j &:= a_{n+1} \cdot \prod_{j=0}^n a_j, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Entsprechend definiert man für  $l \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{j=l}^n a_j \quad \text{bzw.} \quad \prod_{j=l}^n a_j, \quad n \geq l.$$

d) *Binomialkoeffizienten*:

Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  setze

$$\binom{a}{0} := 1, \quad \binom{a}{k+1} := \frac{a-k}{k+1} \binom{a}{k}.$$

Mit vollständiger Induktion lassen sich nun folgende Aussagen beweisen:

i) Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ .

ii) Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $0 \leq k \leq n$  gilt  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

iii) Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{n-k} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases}$$

iv) Für  $n, k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$  „Pascalsches Dreieck“

**1.15 Satz.** (Binomischer Lehrsatz). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

*Beweis.*

i) Induktionsanfang. Die Behauptung gilt offensichtlich für  $n = 0$ , d.h.

$$1 = (a + b)^0 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} a^j b^0 = 1.$$

ii) Induktionsschritt. Wir nehmen an, dass die Aussage des Satzes für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  gelte. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left[ \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right]}_{\substack{1.14d) \\ \equiv \\ \binom{n+1}{j}}} a^j b^{n-j+1} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n-j+1}, \end{aligned}$$

d.h. die Aussage des Satzes gilt auch für  $n + 1$ .

□

**1.16 Definition.** a) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt nach *oben beschränkt*, falls  $s \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$m \leq s \text{ für alle } m \in M.$$

In diesem Fall heißt  $s$  eine *obere Schranke* von  $M$ .

b) Eine obere Schranke  $s_0$  heißt *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* indexSupremum von  $M \subset \mathbb{R}$ , falls für jede obere Schranke  $s$  von  $M$  gilt:

$$s_0 \leq s.$$

Wir setzen  $\sup M := s_0$ .

**Bemerkungen.** a) Sind  $s_0, s'_0$  kleinste obere Schranken von  $M$ , so folgt  $s_0 \leq s'_0$  und  $s'_0 \leq s_0$ , also  $s_0 = s'_0$ . Dies bedeutet, dass das Supremum einer Menge reeller Zahlen *eindeutig* bestimmt ist.

b) Die Existenz des Supremums einer nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen garantieren wir durch das folgende Vollständigkeitsaxiom.

**1.17. Vollständigkeitsaxiom.** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine nicht leere und nach oben beschränkte Menge. Dann besitzt  $M$  ein Supremum  $s_0$ .

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind damit axiomatisch eingeführt, als eine Menge versehen mit der Addition  $+$ , der Multiplikation  $\cdot$ , sowie der Ordnung  $<$ , welche den Körper- und Anordnungsaxiomen, sowie dem Vollständigkeitsaxiom genügen.

**1.18 Definition.** Es sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$  und  $s_0 = \sup M$ . Falls  $s_0 \in M$  ist, so heißt  $s_0$  *Maximum* von  $M$ . Wir setzen  $\max M := s_0$ .

**1.19 Beispiele.** a) Es sei  $M := \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ . Dann gilt  $\sup M = 1$ , aber  $M$  besitzt kein Maximum. In der Tat ist  $s_0 = 1$  klarerweise eine obere Schranke von  $M$ . Nehmen wir an es existiere eine obere Schranke  $s < 1$  von  $M$ . Nach den Rechenregeln 1.4 h) gilt dann  $s < \frac{s+1}{2} < 1$ , im Widerspruch dazu, dass  $s$  obere Schranke von  $M$  ist. Ferner gilt  $1 \notin M$ , also ist  $s_0 = 1$  kein Maximum.

b) Sei  $a \geq 0$  und  $M := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ und } x^2 \leq a\}$ . Dann ist  $M$  nach oben beschränkt, zum Beispiel gilt  $x \leq 1 + a$  für alle  $x \in M$ . Ferner ist offensichtlich  $M \neq \emptyset$ , da  $0 \in M$ . Das Vollständigkeitsaxiom impliziert daher, dass  $s_0 := \sup M$  existiert. Weiter gilt

$$s_0^2 = a.$$

*Beweis.*

i) Ist  $a = 0$ , so gilt  $s_0 = 0$ . Im Folgenden sei daher  $a > 0$ .

- ii) Es gilt  $s_0^2 \geq a$ . Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann ist  $a - s_0^2 > 0$  und somit  $\varepsilon := \frac{a - s_0^2}{2s_0 + 1} > 0$ . Ferner ist  $\varepsilon < 1$ , denn angenommen es gelte  $\varepsilon \geq 1$ , so wäre

$$a - s_0^2 \geq 2s_0 + 1 \Leftrightarrow a \geq s_0^2 + 2s_0 + 1 = (s_0 + 1)^2.$$

Also wäre  $s_0 + 1 \in M$  und somit  $s_0 + 1 \leq \sup M = s_0$ . Widerspruch! Also ist

$$(s_0 + \varepsilon)^2 = s_0^2 + 2s_0\varepsilon + \varepsilon^2 < s_0^2 + (2s_0 + 1)\varepsilon = s_0^2 + a - s_0^2 = a.$$

Deshalb ist  $s_0 + \varepsilon \in M$  und somit auch  $s_0 + \varepsilon \leq s_0$  im Widerspruch zur Definition von  $s_0$ . Deshalb gilt  $s_0^2 \geq a$ .

- iii) Es gilt  $s_0^2 \leq a$ . Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gilt  $s_0^2 - a > 0$ . Setzt man  $\delta := \frac{s_0^2 - a}{2s_0} > 0$ , so ist  $s := s_0 - \delta = \frac{2s_0^2 - s_0^2 + a}{2s_0} = \frac{s_0^2 + a}{2s_0} > 0$  und  $s^2 = s_0^2 - 2s_0\delta + \delta^2 = s_0^2 - s_0^2 + a + \delta^2 = a + \delta^2 > a$ . Also gilt  $s^2 > a \geq x^2$  für alle  $x \in M$  und  $s > x$  für alle  $x \in M$ . Somit ist  $s^2 < s_0^2$  eine obere Schranke von  $M$  im Widerspruch zur Minimalität von  $s_0$ .

Die Aussagen ii) und iii) implizieren, dass  $s_0^2 = a$  gilt.

c) *Folgerung.* Zu jeder reellen Zahl  $a > 0$  existiert genau eine reelle Zahl  $w > 0$  mit  $w^2 = a$ . Die Zahl  $w$  heißt *Wurzel von  $a$*  und wird mit  $w = \sqrt{a}$  bezeichnet.

**1.20 Definition.** a) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt *nach unten beschränkt*, falls ein  $r \in \mathbb{R}$  existiert mit

$$r \leq m \text{ für alle } m \in M.$$

In diesem Fall heißt  $r$  *untere Schranke* von  $M$ .

b) Eine untere Schranke  $r_0$  heißt *größte untere Schranke* oder *Infimum* von  $M$ , falls für alle untere Schranken  $r$  von  $M$  gilt

$$r \leq r_0.$$

Wir setzen  $\inf M := r_0$ .

c) Gilt  $r_0 \in M$ , so heißt  $r_0$  *Minimum von  $M$*  und wir setzen  $\min M := r_0$ .

d) Ist  $M \subset \mathbb{R}$  nach oben und unten beschränkt, so heißt  $M$  *beschränkt*.

**1.21 Lemma.** Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}$  und  $-M := \{-m : m \in M\}$  gelten die folgenden Aussagen.

a)  $M$  ist nach unten beschränkt  $\Leftrightarrow -M$  ist nach oben beschränkt.

b) Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge  $M$  besitzt ein Infimum. Dies ist eindeutig bestimmt.

c) Ist  $M \neq \emptyset$  nach unten beschränkt, so gilt  $\inf M = -\sup(-M)$ .

Den einfachen Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

**1.22 Satz.** (Charakterisierung des Supremums). *Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine nichtleere und nach oben beschränkte Menge sowie  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Dann gilt*

$$\sup M = s_0 \Leftrightarrow m \leq s_0 \text{ für alle } m \in M \text{ und für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } \mu \in M \\ \text{mit } \mu > s_0 - \varepsilon.$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Sei  $s_0 = \sup M$ . Dann ist  $m \leq s_0$  für alle  $m \in M$ . Wir nehmen an es existiere  $\varepsilon > 0$  so dass für alle  $m \in M$  die Ungleichung  $m \leq s_0 - \varepsilon$  gelte. Dann ist  $s := s_0 - \varepsilon$  eine obere Schranke von  $M$ . Widerspruch!

$\Leftarrow$ : Nach Voraussetzung ist  $s_0$  eine obere Schranke von  $M$ . Wir nehmen an, es existiere  $s \in \mathbb{R}$  mit  $s < s_0$  und  $m \leq s$  für alle  $m \in M$ . Setze  $\varepsilon := s_0 - s > 0$ . Dann ist  $s = s_0 - \varepsilon$  und  $m \leq s_0 - \varepsilon$  für alle  $m \in M$ . Widerspruch!

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts definieren wir noch die *natürlichen Zahlen* Zahlen  $\mathbb{N}$  sowie die *ganzen Zahlen* als

$$\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} \text{ und } \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge  $\mathbb{Q}$  der *rationalen Zahlen* ergibt sich dann als

$$\mathbb{Q} := \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\};$$

Ferner nennen wir die Elemente von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  die *irrationalen Zahlen*.

**1.23 Korollar.** a)  $\mathbb{N}_0$  ist nicht nach oben beschränkt.

b) *Prinzip des Archimedes:*

Für alle  $a > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$  existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot a > b$ .

c) *„Klassische Schlussweise“ der Analysis:*

Es gelte  $0 \leq a < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $a = 0$ .

*Beweis.* a) Wir nehmen an, dass  $\mathbb{N}_0$  nach oben beschränkt sei. Dann existiert  $s_0 = \sup \mathbb{N}_0$  nach dem Vollständigkeitsaxiom. Die Charakterisierung des Supremums in Satz 1.22 mit  $\varepsilon = 1$  impliziert, dass ein  $n \in \mathbb{N}_0$  existiert mit  $n > s_0 - 1$ . Dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $s_0$ .

b) Annahme es gelte  $n \cdot a \leq b$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $\mathbb{N}_0$  nach oben beschränkt durch  $\frac{b}{a}$  im Widerspruch zur Aussage a).

c) Wir nehmen an, es gelte  $a > 0$ . Dann ist  $n \cdot a < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  im Widerspruch zur Aussage b).

□

## 2 Die komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt führen wir den Körper der komplexen Zahlen wiederum axiomatisch ein und beginnen mit der folgenden Definition.

**2.1 Definition.** Auf  $\mathbb{R}^2 := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  definieren wir eine Addition und eine Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Addition} \quad \oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 : (a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d) \\ \text{Multiplikation} \quad \odot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 : (a, b) \odot (c, d) := (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Dann erfüllen die Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$  für  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  und  $z = (e, f) \in \mathbb{R}^2$  die Körperaxiome von Abschnitt 1, wobei

$$\begin{aligned} 0_{\oplus} &= (0, 0) && \text{das neutrale Element bzgl. der Addition } \oplus, \\ 1_{\odot} &= (1, 0) && \text{das neutrale Element bzgl. der Multiplikation } \odot, \\ -(a, b) &= (-a, -b) && \text{das inverse Element bzgl. der Addition } \oplus, \\ (a, b)^{-1} &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) && \text{das inverse Element bzgl. der Multiplikation } \odot \text{ ist,} \\ &&& \text{falls } (a, b) \neq 0_{\oplus} = (0, 0). \end{aligned}$$

Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf die Lineare Algebra. Die Menge  $\mathbb{R}^2$  versehen mit  $\oplus$  und  $\odot$  ist deshalb ein Körper, welchen wir den *Körper der komplexen Zahlen* nennen. Er wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

Für  $(a, 0) \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} (a, 0) \oplus (b, 0) &= (a + b, 0), \\ (a, 0) \odot (b, 0) &= (a \cdot b, 0), \end{aligned}$$

d.h. identifizieren wir  $a \in \mathbb{R}$  mit  $(a, 0) \in \mathbb{C}$ , so ist  $\mathbb{R}$  ein *Teilkörper von  $\mathbb{C}$* .

**2.2 Definition.** Wir setzen  $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ . Die Zahl  $i \in \mathbb{C}$  heißt *imaginäre Einheit*.

Nach der Definition von  $\odot$  gilt

$$i^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

d.h.  $i$  ist eine Lösung der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ .

**2.3 Bemerkung.** Der Körper  $\mathbb{C}$  läßt sich nicht anordnen, d.h. es existiert keine Relation „ $<$ “, so dass in  $\mathbb{C}$  die Anordnungsaxiome von Abschnitt 1 gelten. In der Tat, nehmen wir an, dass  $\mathbb{C}$  sich anordnen lassen würde. Dann ist  $i^2 > 0$  und  $0 < i^2 + i^2 = 0$ . Widerspruch!

**2.4 Bemerkung.** Sei  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$(a, b) = \underbrace{(a, 0)}_{=a} \oplus \underbrace{(0, 1)}_{=i} \odot \underbrace{(b, 0)}_{=b}.$$

Identifizieren wir wie oben  $a$  mit  $(a, 0)$  so erhalten wir

$$\mathbb{C} \ni (a, b) = z = a + i \cdot b.$$

Die reelle Zahl  $a$  heißt *Realteil* von  $z = a + ib$  und wird mit  $\operatorname{Re} z = a$  bezeichnet. Ferner heißt  $b$  *Imaginärteil* von  $z = a + ib$ . Wir setzen  $\operatorname{Im} z = b$ .

**2.5 Definition.** (Konjugation und Betrag). Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ .

a) Die komplexe Zahl

$$\bar{z} := a - ib$$

heißt *konjugiert komplexe Zahl* von  $z$ .

b) Der *Betrag*  $|z|$  von  $z$  ist definiert als  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ .

Für  $z \in \mathbb{R}$  stimmt die Definition des Betrags natürlich mit der Definition aus Abschnitt 1 überein.

**2.6 Lemma.** (Rechenregeln für komplexe Zahlen). Für komplexe Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die folgenden Rechenregeln:

$$a) \operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w, \quad \operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w,$$

$$b) \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$c) z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

$$d) z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 = \operatorname{Im} z,$$

$$e) |z| = |\bar{z}|,$$

$$f) |z + w| \leq |z| + |w|, \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

**2.7 Bemerkung.** (Die Gaußsche Zahlenebene). Die komplexe Zahlen können in der Gaußschen Zahlenebene wie folgt dargestellt werden.





# II Konvergenz von Folgen und Reihen

Viele der grundlegenden Sätze über Folgen und unendliche Reihen, welche wir im Folgenden untersuchen, gehen auf AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857), einen der bedeutendsten französischen Mathematiker seiner Zeit, zurück. Lagrange sagte über den zwölfjährigen Cauchy, der schon als Schüler ob seiner außergewöhnlichen mathematischen Begabung auffiel: „Vous voyez ce petit jeune homme, eh bien! il nous remplacera tous tant que nous sommes de géomètres“ und empfahl seinem Vater: „Lassen Sie dieses Kind vor dem siebzehnten Lebensjahr kein mathematisches Buch anrühren. Wenn Sie sich nicht beeilen, ihm eine gründliche literarische Ausbildung zu geben, so wird seine Neigung ihn fortreißen“. Cauchy wurde 1816 als Professor an der École Polytechnique in Paris berufen und seine drei großen Lehrbücher *Cours d'Analyse*, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, *Leçons sur le calcul différentiel* waren zentrale Wegbereiter zur modernen Strenge der Analysis. Im *Cours d'Analyse* wird die Theorie der unendlichen Reihen in einer Systematik entwickelt, die heute noch als vorbildhaft gelten kann.

Die von Cauchy benutzten unendlich kleinen Größen wurden von KARL WEIERSTRASS (1815-1897) durch eindeutige und klare, in Ungleichungen ausgedrückte Formulierungen, ersetzt. Sehr hilfreich war auch eine standardisierte Buchstabenwahl:  $\varepsilon$  als beliebig kleine positive Zahl (wahrscheinlich abgeleitet von *erreur*) und  $\delta$  als die zu  $\varepsilon$  gehörende Zahl. Ab 1864 lehrte er als Professor an der Berliner Universität. In seinen Vorlesungszyklen behandelt er die Konvergenz von Folgen und Reihen und allgemeiner die Infinitesimalrechnung in „Weierstraßscher Strenge“ und wurde so zum Vater der „Epsilontik“, welche heute in allen Vorlesungen über Analysis Standard ist.

## 1 Konvergenz von Folgen

Wir beginnen dieses für die Vorlesung und den weiteren Aufbau der Analysis sehr wichtige Kapitel über Konvergenz von Folgen und Reihen mit einigen Vorbemerkungen über Funktionen und deren Eigenschaften.

**1.1 Vorbemerkungen.** a) Es seien  $X, Y$  Mengen. Eine *Funktion* oder eine *Abbildung*  $f : X \rightarrow Y$  ist eine Vorschrift, welche jedem  $x \in X$  in *eindeutiger Weise* ein Element  $y \in Y$  zuordnet. Wir schreiben

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

- b) Die Menge  $\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$  heißt der *Graph* von  $f$ .
- c) Zwei Funktionen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow Y$  heißen gleich, falls  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in X$  gilt.
- d) Die Menge  $\text{Abb}(X, Y)$  ist definiert als die Menge aller Funktionen  $f : X \rightarrow Y$ .
- e) Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann heißt  $X$  *Definitionsbereich* von  $f$  und  $f(X)$  der *Bildbereich* von  $f$ . Ferner heißt
- $f$  *injektiv*, falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .
- $f$  *surjektiv*, falls  $f(X) = Y$  gilt.
- $f$  *bijektiv*, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.
- f) Gilt  $Y \subset \mathbb{R}$  bzw.  $Y \subset \mathbb{C}$ , so heißt  $f$  *reellwertige* bzw. *komplexwertige* Funktion.

Es sei  $M$  eine Menge. Wir nennen eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$  die jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein Element  $a_n$  zuordnet, eine *Folge in  $M$* . Setzt man  $a_n := f(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so schreiben wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Gilt  $a_n \in \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *reelle Folge*; gilt analog  $a_n \in \mathbb{C}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *komplexe Folge*. Gelegentlich ist es nützlich, die Folge mit  $a_0$  zu beginnen. In diesem Fall betrachtet man eine Folge dann als Abbildung  $\mathbb{N}_0 \rightarrow M$  und wir schreiben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

Setzen wir  $a_n := (-1)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so entsteht die Folge  $-1, 1, -1, \dots$ . Ferner liefert die Vorschrift  $a_n := \frac{1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  die Folge  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ .

**1.2 Definition.** (Konvergenz von Folgen). Eine komplexe Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *konvergiert gegen*  $a \in \mathbb{C}$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

In Quantoren geschrieben bedeutet dies

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

Die Zahl  $a$  heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Existiert ein  $a \in \mathbb{C}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , so heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *konvergente Folge*, andernfalls *divergente Folge*. Konvergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 0, so heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *Nullfolge*.

Geometrische Deutung:

**1.3 Bemerkungen.** a) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt, d.h. gilt  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a^*$  und  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_*$  für  $a^* \in \mathbb{C}$  und  $a_* \in \mathbb{C}$ , so folgt  $a^* = a_*$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt. Dann existieren  $N_0^1, N_0^2 \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} |a_n - a^*| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0^1 \\ |a_n - a_*| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N_0^2. \end{aligned}$$

Da  $a_1 - a_2 = a_1 - a_n + a_n - a_2$  folgt

$$0 \leq |a_1 - a_2| \leq |a_1 - a_n| + |a_n - a_2| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \max\{N_0^1, N_0^2\},$$

d.h. es gilt  $|a_1 - a_2| = 0$  und somit  $a_1 = a_2$  wegen der klassischen Schlussweise der Analysis I.1.23.

b) Falls  $a_n$  nur definiert ist für  $n \geq N$  für ein gewisses  $N \in \mathbb{N}$ , so bezeichnet man  $(a_N, a_{N+1}, \dots)$  auch als Folge und wir schreiben  $(a_n)_{n \geq N}$ .

**1.4 Beispiele.** a) Für  $a \in \mathbb{C}$  konvergiert die konstante Folge  $(a, a, \dots)$  offensichtlich gegen  $a$ .

b) Die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$  ist eine Nullfolge.

Um dies zu verifizieren, sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip I.1.23 existiert eine Zahl  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $N_0 \cdot \varepsilon > 1$ . Also gilt

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

c) Die Folge  $(\frac{n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen 1. Denn: sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wiederum existiert nach dem Archimedischen Prinzip I.1.23 ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $N_0 \cdot \varepsilon > 1$ . Also folgt

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{N_0} < \varepsilon, \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

d) Für  $n \in \mathbb{N}$  setze

$$a_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}.$$

Da  $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$  für alle  $j \geq 1$  gilt, folgt  $a_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Somit konvergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen 1, d.h.  $(a_n)_{n \geq 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ . Obige Summe wird oft auch als *Teleskopsumme* bezeichnet.

e) Es sei  $a_n = (-1)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann divergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Denn, nehmen wir an, dass  $(a_n)$  gegen ein  $a \in \mathbb{C}$  konvergiert. Dann existiert  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{1}{2}$  für alle  $n \geq N_0$ . Also gilt für alle diese  $n$

$$2 = |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Wir erhalten also einen Widerspruch, welcher bedeutet, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent ist.

**1.5 Definition.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  heißt *beschränkt*, falls eine Konstante  $M > 0$  existiert mit

$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**1.6 Satz.** Jede konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

*Beweis.* Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  für ein  $a \in \mathbb{C}$ . Nach Definition existiert für  $\varepsilon = 1$  ein  $N_0 \geq 1$  mit  $|a_n - a| < 1$  für alle  $n \geq N_0$ . Also gilt für  $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|,$$

und somit

$$|a_n| \leq \max \underbrace{\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\}}_{\text{endlich viele}} =: M \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

□

**1.7 Beispiele.** a) Die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt, aber nicht konvergent.

b) Für  $q \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$  setze  $a_n := q^n$ . Dann gilt:

i) Ist  $|q| > 1$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt, also divergent.

ii) Ist  $|q| < 1$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

**1.8 Lemma.** (Rechenregeln für konvergente Folgen). *Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

$$a) (a_n + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b.$$

$$b) (a_n \cdot b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab.$$

$$c) \text{ Ist } b \neq 0, \text{ so existiert ein } N_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } b_n \neq 0 \text{ für alle } n \geq N_0 \text{ und } \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}.$$

*Beweis.* a) Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existieren  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, & n \geq N_1, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}, & n \geq N_2. \end{aligned}$$

Setzen wir  $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$ , so gilt

$$|a + b - (a_n + b_n)| \leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b - b_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

also die Behauptung.

Die Aussagen b) und c) überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Das folgende Beispiel illustriert gut die obigen Rechenregeln für konvergente Folgen. Für  $n \geq 2$  setzen wir

$$a_n = \frac{3n^2 - 2a + 1}{-n^2 + n}.$$

Dann ist  $a_n = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n}}$  für alle  $n \geq 2$  und es folgt aus obigem Lemma 1.8, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$  gilt.

Eine wichtige Vorgehensweise um eine gegebene Folge auf Konvergenz zu untersuchen, besteht darin, ihre Folgenglieder gegen die einer konvergenten Folge abzuschätzen. Hierzu müssen wir jedoch sicherstellen, dass Konvergenz und Ordnung miteinander verträglich sind. Dies ist jedoch die Aussage des folgenden Lemmas.

**1.9 Lemma.** (Verträglichkeit von Konvergenz und Ordnung). *Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente reelle Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq N_0$ , so folgt  $a \leq b$ .*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass die Aussage des Lemmas falsch sei, d.h. dass  $a > b$  gelte. Für  $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$  existiert nach Voraussetzung ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} a - a_n &\leq |a - a_n| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq N_0, \\ b_n - b &\leq |b - b_n| < \varepsilon & \text{für alle } n \geq N_0. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$b_n < b + \varepsilon = \frac{2b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

Widerspruch! □

Der folgende sogenannte „Sandwichsatz“ folgt unmittelbar aus obigem Satz.

**1.10 Korollar.** (Sandwichsatz). *Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen. Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$  und es existiere ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \geq N_0.$$

*Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .*

Für den weiteren Aufbau der Analysis ist es wichtig, Kriterien zu entwickeln, welche die Konvergenz einer Folge implizieren ohne deren Grenzwert explizit zu kennen. Hierzu führen wir folgende Begriffe ein.

**1.11 Definition.** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt

- a) *monoton wachsend*, falls  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- b) *streng monoton wachsend*, falls  $a_{n+1} > a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- c) *monoton fallend*, falls  $a_{n+1} \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,
- d) *streng monoton fallend*, falls  $a_{n+1} < a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Gilt einer der Fälle i)-iv), so heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *monoton*.

**1.12 Satz.** *Jede beschränkte monotone reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und zwar*

- a) *gegen  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend,*
- b) *gegen  $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , falls  $(a_n)$  monoton fallend ist.*

*Beweis.* a) Das Vollständigkeitsaxiom impliziert, dass  $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  existiert. Wir folgern aus der Charakterisierung des Supremums in Satz I.1.22, dass für gegebenes  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit der Eigenschaft, dass

$$s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s \quad \text{for all } n \geq N_0$$

gilt. Deshalb ist  $-\varepsilon < a_n - s \leq 0$  für alle  $n \geq N_0$  und es gilt  $|a_n - s| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N_0$ .

Der Beweis der Aussage b) verläuft analog. □

Der obige Satz ist sehr nützlich um die *Wurzelfunktion* zu definieren.

**1.13 Satz.** *Es sei  $a > 0$  und  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$ . Dann existiert genau eine reelle Zahl  $w > 0$  mit  $w^k = a$ . In diesem Fall schreiben wir  $\sqrt[k]{a} := a^{1/k} := w$ .*

*Beweis.* Wir beginnen den Beweis mit der *Existenz* der Zahl  $w$ . Hierzu definieren wir eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  rekursiv via

$$a_1 := a + 1, \quad a_{j+1} := a_j \left( 1 + \frac{a - a_j^k}{k \cdot a_j^k} \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Mit vollständiger Induktion beweisen wir die folgenden Aussagen:

- a)  $a_j > 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ ,
- b)  $a_j^k \geq a$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ ,
- c)  $a_{j+1} \leq a_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , d.h.  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  ist eine monoton fallende Folge.

Für den Beweis der Aussage b) verwenden wir im Induktionsschritt mit Vorteil die Bernoullische Ungleichung. Da die Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  beschränkt und monoton fallend ist, impliziert Satz 1.12, dass

$$w := \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = \inf\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$$

gilt. Ferner ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{j+1} = w$  und  $(\lim_{j \rightarrow \infty} a_j)^k \stackrel{1.8b)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} a_j^k \geq a > 0$ . Weiterhin, da

$$a_{j+1} = a_j \left( 1 + \frac{a - a_j^k}{k \cdot a_j^k} \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} w \cdot \left( 1 + \frac{a - w^k}{k \cdot w^k} \right),$$

gilt, folgt  $w = w \left( 1 + \frac{a - w^k}{k \cdot w^k} \right)$  und somit  $a = w^k$ .

Um die *Eindeutigkeit* der Zahl  $w$  zu beweisen, betrachte  $u, v > 0$  mit  $u^k = w = v^k$  und  $u \neq v$ . Es sei oBdA  $u < v$ . Dann gilt aber  $w = u^k < v^k = w$ . Widerspruch!

□

Wir wollen an dieser Stelle noch die obige Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  geometrisch interpretieren. Sie ist Grundlage zur näherungsweise Berechnung der Wurzel einer gegebenen reellen Zahl  $a > 0$ , wie zum Beispiel auch im *Newton-Verfahren*.

Betrachtet man die Tangente an die Funktion  $f(x) = x^k - a$  im Punkt  $x = a_j$ , so schneidet diese die  $x$ -Achse im Punkt  $x = a_{j+1}$ . Wir bemerken ferner dass dieses Verfahren für jeden Startwert  $a_1 > 0$  konvergiert und dass eine Konstante  $M > 0$  existiert mit  $|\sqrt[k]{a} - a_{j+1}| \leq M |\sqrt[k]{a} - a_j|^2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Wir sprechen deshalb von quadratischer Konvergenz des Verfahrens.

**1.14 Bemerkung.** Ausgehend von der  $n$ -ten Wurzel  $\sqrt[n]{a}$  einer reellen Zahl  $a \geq 0$  definieren wir allgemeiner für  $p, q \in \mathbb{N}$

$$a^{p/q} := (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q},$$

und setzen für  $a > 0$

$$a^{-p/q} := (a^{-1})^{p/q}.$$

Setzen wir ferner  $a^0 := 1$ , so erhält man via vollständiger Induktion die folgenden Rechenregeln

$$a^{p+q} = a^p a^q, \quad a^{pq} = (a^p)^q, \quad a^p b^p = (ab)^p$$

für  $a \geq 0, b \geq 0$  und  $p, q \in \mathbb{Q}$ . Wir werden später die allgemeine Potenz  $a^x$  für  $a \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  elegant mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren. Aus diesem Grunde belassen wir es an dieser Stelle mit der obigen rudimentären Betrachtung von  $a^q$  für  $q \in \mathbb{Q}$ .

Wir kommen nun zu einer weiteren Anwendung des Satzes 1.12.

**1.15 Satz.** (Die Zahl  $e$ ). Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei definiert durch

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Dann ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent. Ihr Grenzwert heißt Eulersche Zahl und wird mit  $e$  bezeichnet. Ferner gilt die Abschätzung

$$2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \leq 3.$$

*Beweis.* Nach obigem Satz 1.12 und Lemma 1.9 genügt es zu zeigen, dass

- a)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge ist und dass
- b)  $2 \leq a_n \leq 3$  für alle  $n \geq 1$  gilt.

zu a): Wir verifizieren mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1. \end{aligned}$$



Also gilt  $a_n \geq a_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

zu b): Nach der obigen Aussage a) gilt  $a_1 = 2 \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\substack{\text{Bin.Satz} \\ \text{I.1.15}}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = 2 + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j}.$$

Für  $2 \leq j \leq n$  gilt ferner

$$\binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{1}{n^j} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots (n-j) \underbrace{n \cdots n}_{j\text{-mal}}} \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{j!} \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

und somit

$$a_n \leq 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \stackrel{\substack{\text{geom.Reihe} \\ \text{I.1.11b)}}}{=} 1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch einige weitere, wichtige Grenzwerte. Die Beweise der folgenden Aussagen d) und e) sind sehr nützliche Übungsaufgaben, welche ein gutes Verständnis des Konvergenzbegriffs einfordern.

**1.16 Beispiele.** a) Für  $s \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0.$$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $N_0 \geq (\varepsilon)^{\frac{-1}{s}}$ . Dann gilt  $\frac{1}{n^s} < \varepsilon$  für alle  $n > N_0$ .

b) Für  $a > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Wir betrachten zunächst den Fall  $a \geq 1$ . Setzt man  $b_n := \sqrt[n]{a}$ , so folgt aus der Bernoulli'schen Ungleichung  $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$ . Insbesondere ist also  $b_n < \frac{a}{n}$  und wählen wir  $N_0 > \frac{a}{\varepsilon}$ , so gilt

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = b_n < \varepsilon, \quad n > N_0.$$

Gilt  $a < 1$ , so ist  $a^{-1} > 1$  und mittels der in Lemma 1.8 c) bewiesenen Rechenregel folgt die Aussage aus dem oben bewiesenen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-1}} \right)^{-1} = 1.$$

c) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Der Binomische Lehrsatz impliziert für  $b_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$

$$n = (1 + b_n)^n \geq 1 + b_n^2, \quad \text{also } n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} b_n^2.$$

Daher ist  $b_n^2 \leq \frac{2}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und wählt man zu  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $N_0 \geq \frac{2}{\varepsilon^2}$ , so gilt

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = b_n < \varepsilon, \quad n > N_0.$$

d) Für  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

d.h. für  $a$  mit  $|a| > 1$  wächst die Funktion  $n \mapsto a^n$  schneller als *jede* Potenz  $n \mapsto n^k$ . In dieser Situation sind zwei entgegengesetzte Kräfte am Werk: der Zähler  $n^k$  wächst über alle Grenze, während der Term  $\frac{1}{a^n}$  nach Null strebt. Es ist nun nicht ohne weiteres einzusehen ist, welcher Term überwiegt.

e) Für  $a \in \mathbb{C}$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

d.h. die Fakultät  $n \mapsto n!$  wächst schneller als *jede* der Funktionen  $n \mapsto a^n$ .

## 2 Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Wir untersuchen im Folgenden nun den umgekehrten Sachverhalt, d.h. wir betrachten beschränkte Folgen und fragen nach der Existenz von konvergenten Teilfolgen. Betrachtet man das Beispiel der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n$ , so ist obige Frage leicht zu beantworten: es existieren mindestens zwei konvergente Teilfolgen, nämlich  $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Der folgende Satz von Bolzano-Weierstraß gibt eine positive Antwort auf diese Frage im allgemeinen Kontext.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der formalen Definition einer Teilfolge einer gegebenen Folge.

**2.1 Definition.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine streng monoton wachsende Funktion (d.h.  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ). Dann heißt die Folge  $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  *Teilfolge* von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Setzt man  $\varphi(k) := n_k$ , so schreiben wir auch  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Zur Erläuterung der Definition betrachten wir die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := (-1)^n$ . Wählen wir in der obigen Definition  $\varphi(n) = 2n$ , so gilt  $a_{2n} = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; wählen wir hingegen  $\varphi(n) = 2n + 1$ , so gilt  $a_{2n+1} = -1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**2.2 Lemma.** *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  eine beschränkte Folge. Dann besitzt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monotone Teilfolge.*

*Beweis.* Eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  heiße klein, falls  $a_n \leq a_l$  gilt für alle  $l \geq n$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- a) Zu jeder Zahl  $m \in \mathbb{N}$  existiert ein kleines  $n > m$ .
  - b) Es existiert  $l \in \mathbb{N}$ , so dass alle kleinen  $n$  kleiner als  $l$  sind.
- zu a): Wir setzen

$$\begin{aligned}\varphi(1) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : n \text{ klein}\}, \\ \varphi(k+1) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : n \text{ klein und } n > \varphi(k)\}, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi$  nach Konstruktion eine streng monoton wachsende Funktion und die Folge  $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend.

zu b) In diesem Fall existiert für alle  $m \geq l$  ein  $j > m$  mit  $a_j < a_m$ . Wir setzen

$$\begin{aligned}\varphi(1) &:= l, \\ \varphi(k+1) &:= \min\{j \in \mathbb{N} : j > \varphi(k) \text{ und } a_j < a_{\varphi(k)}\}, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Dann ist  $\varphi$  streng monoton wachsend und die Folge  $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend. □

**2.3 Theorem.** (Bolzano-Weierstraß, 1. Fassung). *Jede beschränkte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

*Beweis.* Für den Fall, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 2.2 und Satz 1.12.

Wir betrachten im Folgenden also eine komplexe Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $a_n \in \mathbb{C}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte reelle Folge und nach der obigen Aussage für reelle Folgen, besitzt diese eine konvergente Teilfolge  $(\operatorname{Re} a_{\varphi_1(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Ferner ist  $(\operatorname{Im} a_{\varphi_1(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine reelle beschränkte Folge. Wiederum existiert nach der obigen Aussage eine konvergente Teilfolge  $(\operatorname{Im} a_{\varphi_2 \circ \varphi_1(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Setzen wir  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ , so ist  $\varphi$  streng monoton wachsend und  $(a_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine konvergente Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Um die obige Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß noch aus anderen Perspektive zu verstehen, führen wir an dieser Stelle den Begriff des Häufungspunktes einer Folge ein.

**2.4 Definition.** (Häufungspunkt). Eine Zahl  $a \in \mathbb{C}$  heißt *Häufungspunkt* der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $|a - a_n| < \varepsilon$ .

**2.5 Beispiele.** a) Es sei  $a_n = (\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots)$ . Dann ist  $a = 0$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist aber divergent.

b) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (i^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots)$  besitzt 4 Häufungspunkte, nämlich  $1, i, -1, -i$ .

c) Es sei  $a_n = n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Häufungspunkte und auch keine konvergente Teilfolge.

Im Folgenden bezeichne  $\mathbb{K}$  den Körper der reellen oder komplexen Zahlen, d.h. es gilt  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**2.6 Bemerkungen.** a) Für  $a \in \mathbb{K}$  und  $\varepsilon > 0$  setze  $U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{K} : |a - z| < \varepsilon\}$ . Dann heißt  $U_\varepsilon(a)$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ .

b) Eine Zahl  $a \in \mathbb{K}$  ist Limes der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ , genau dann wenn für alle  $\varepsilon > 0$  die Menge  $U_\varepsilon(a)$  fast alle Folgenglieder  $a_n$  enthält, d.h. alle bis auf endlich viele.

c) Eine Zahl  $a \in \mathbb{K}$  ist Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  genau dann wenn für alle  $\varepsilon > 0$  die Menge  $U_\varepsilon(a)$  unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  enthält.

**2.7 Lemma.** *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $a$  genau dann ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wenn eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .*

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Die Bemerkung 2.6 c) impliziert, dass für alle  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Folgenglieder  $a_n$  in  $U_\varepsilon(a)$  liegen. Setze  $n_1 := 0$  und wähle für alle  $k > 1$  ein  $n_k > n_{k-1}$  mit  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(a)$ . Dann ist  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend und es gilt  $|a - a_{n_k}| < \frac{1}{k}$  für alle  $k \geq 1$ , d.h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

$\Leftarrow$ : Sei  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . Dann enthält  $U_\varepsilon(a)$  für alle  $\varepsilon > 0$  fast alle  $a_{n_k}$  für  $k \in \mathbb{N}$ , also unendlich viele, vgl. die Bemerkung 2.6 b) und c). □

**2.8 Theorem.** (Bolzano-Weierstraß, 2. Fassung). *Jede beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt einen Häufungspunkt. Ferner besitzt die Menge der Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Minimum  $r$  und ein Maximum  $s$ .*

In der obigen Situation setzen wir

$$\begin{aligned} r &:= \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n && \text{bzw. } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (Limes Inferior),} \\ s &:= \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n && \text{bzw. } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ (Limes Superior).} \end{aligned}$$

*Beweis.* Es sei  $H := \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ . Dann gilt

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq h \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ für alle } h \in H.$$

Ferner impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß in der ersten Fassung 2.3 sowie Lemma 2.7, dass  $H \neq \emptyset$  gilt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert  $s := \sup H$ . Es ist noch zu zeigen, dass  $s \in H$  gilt. Hierzu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach der Charakterisierung des Supremums gegeben in Satz I.1.22 existiert ein  $a \in H$  mit

$$a \leq s < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es gilt also  $|s - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$  gilt dann

$$|s - x| \leq |s - a| + |a - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d.h.  $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subset U_\varepsilon(s)$ . Nun enthält  $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$  unendlich viele  $a_n$ , also auch  $U_\varepsilon(s)$ . Die Bemerkung 2.6 impliziert damit, dass  $s \in H$  gilt.

Der Beweis für den Limes Inferior verläuft analog. □

**2.9 Beispiele.** a) Wir betrachten wiederum die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt klarerweise  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ .

b) Wir betrachten die Folge

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{7}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{9}{5}, \dots$$

welche formal gegeben ist durch

$$a_n = \frac{j}{k+1} \quad \text{für } n = k^2 + j, \quad j = 1, 2, \dots, 2k+1, k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann kommt jede rationale Zahl  $q$  mit  $0 < q < 2$  in dieser Folge (sogar unendlich oft) vor und es gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Ferner ist jedes  $x$  mit  $0 \leq x \leq 2$  ein Häufungspunkt der obigen Folge. Insbesondere besitzt diese Folge also unendliche viele Häufungspunkte.

Bisher hatten wir die Konvergenz einer Folge nur für den Fall untersucht, dass der Grenzwert explizit bekannt war. Eine Ausnahme bildete nur der Satz 1.12. Wir betrachten nun ein sogenanntes "inneres" Kriterium.

**2.10 Definition.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  heißt *Cauchyfolge*, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

**2.11 Theorem.** *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  eine Folge. Dann ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergent, wenn die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist.*

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Es sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_0$ , also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad n, m \geq N_0.$$

$\Leftarrow$ : Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Wir unterteilen den Beweis in 3 Schritte:

a) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

Um dies zu zeigen, wähle  $m_0 \in \mathbb{N}$  so, dass  $|a_n - a_m| < 1$  für alle  $n, m \geq m_0$ . Dann gilt  $|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m| < 1$  für alle  $n, m \geq m_0$ . Also ist  $|a_n| \leq 1 + |a_{m_0}|$  für alle  $n \geq m_0$ . Daher gilt  $|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{m_0-1}|, 1 + |a_{m_0}|\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und somit ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge.

b) Der Satz von Bolzano-Weierstraß in der ersten Fassung impliziert, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  besitzt mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

c) Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Die Voraussetzung impliziert, dass ein  $m_1 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n, m \geq m_1$ . Nach dem Schritt b) gilt  $|a - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n_k > m_1$ . Also gilt für alle  $n \geq m_1$

$$|a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon,$$

d.h.  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

□

**2.12 Bemerkungen.** a) Die Tatsache, dass jede Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$  konvergiert, heißt auch *Vollständigkeit* von  $\mathbb{K}$ .

b) Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  definiert in Abschnitt I.1 ist nicht vollständig!

c) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Vollständigkeitsaxiom} &\iff \text{Archimedisches Prinzip und Vollständigkeit von } \mathbb{R} \\ &\iff \text{Archimedisches Prinzip und Satz von Bolzano-} \\ &\quad \text{Weierstraß in } \mathbb{R} \end{aligned}$$

d) Für  $q \in \mathbb{C}$  mit  $q \neq 1$  und  $|q| = 1$  setzen wir  $a_n := q^n$ . Dann gilt

$$|a_{n+1} - a_n| = |q|^{n+1} |q - 1| = |q - 1| > 0 \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Also ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchyfolge und somit ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergiert. Wir haben also gezeigt, dass die Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann konvergent ist, falls  $|q| < 1$  oder  $q = 1$  gilt.

Wir führen folgende *Notation* ein: für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$  setzen wir

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

und nennen dies das abgeschlossene Intervall  $[a, b]$ .

**2.13 Theorem.** (Banachscher Fixpunktsatz). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Abbildung. Es existiere ein  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 < q < 1$  und*

$$(2.1) \quad |f(x) - f(y)| < q|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

*Dann existiert genau ein  $r \in [a, b]$  mit  $f(r) = r$ . Dies bedeutet, dass  $r$  ein Fixpunkt von  $f$  ist.*

**2.14 Bemerkung.** Eine Abbildung, welche die obige Bedingung (2.1) erfüllt, heißt *strikte Kontraktion*.

*Beweis.* Für ein  $x_0 \in [a, b]$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  definiere

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent.

Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$|x_m - x_{m-1}| \leq q^{m-1} |x_1 - x_0|, \quad m \geq 1,$$

via Induktion. Der Induktionsanfang  $m = 1$  ist klar. Sei die Behauptung also für  $m$  schon bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_{m+1} - x_m| &= |f(x_m) - f(x_{m-1})|, \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{\leq} q |x_m - x_{m-1}|, \\ &\stackrel{\text{Ind. Vor.}}{\leq} q q^{m-1} |x_1 - x_0| = q^m |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Also gilt für  $m > n$

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|, \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n) |x_1 - x_0|, \\ &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} |x_1 - x_0| = \frac{q^n - q^m}{1 - q} |x_1 - x_0| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Da  $0 < q < 1$  folgt aus Bemerkung 2.12c), dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  gilt. Also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und Theorem 2.11 impliziert, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Wir setzen  $r := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

b) Es gilt  $f(r) = r$ .

Um dies zu zeigen sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|r - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $N \geq N_0$ , also

$$\begin{aligned} |f(r) - r| &\leq |f(r) - x_{n_0+1}| + |x_{n_0+1} - r|, \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} |f(r) - f(x_{n_0})| + |x_{n_0+1} - r|, \\ &\leq q |r - x_{n_0}| + |x_{n_0+1} - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die klassische Schlussweise der Analysis aus Kapitel I.1.23 impliziert, dass  $f(r) = r$  gilt.

c) Der Fixpunkt  $r$  ist eindeutig bestimmt.

Wir nehmen an, dass ein  $r' \in [a, b]$  existiere mit  $f(r') = r'$ . Dann gilt

$$|r - r'| = |f(r) - f(r')| \leq q |r - r'|.$$

Hieraus folgt  $(1 - q)|r - r'| = 0$ , welches  $|r - r'| = 0$  und wiederum  $r = r'$  impliziert.  $\square$



**2.15 Bemerkungen.**

a) Der obige Beweis ist konstruktiv, d.h. wir konstruieren den Fixpunkt  $r$  als  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(r)$  mit  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ .

b) Es gelten die folgenden Fehlerabschätzungen:

$$|r - x_n| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0| \quad \text{a-priori-Abschätzung,}$$

$$|r - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}| \quad \text{a-posteriori-Abschätzung.}$$

c) Der Banachsche Fixpunktsatz gilt auch, falls  $[a, b]$  durch  $\mathbb{R}$  ersetzt wird.

d) Eine Verallgemeinerung des Satzes auf vollständige metrische Räume wird in der Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen" wichtig sein.

### 3 Unendliche Reihen

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ , wobei wiederum  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  gilt. Wir gehen in diesem Abschnitt der Frage nach, unter welchen Bedingungen die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert. Natürlich müssen wir zunächst präzisieren, was wir unter einer Reihe und deren Konvergenz beziehungsweise Divergenz verstehen und beginnen deshalb mit der folgenden Definition.

**3.1 Definition.** a) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$ . Wir nennen das Symbol

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

eine *unendliche Reihe mit Gliedern*  $a_n$ .

b) Weiter heißt  $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , die *n-te Partialsumme* der Reihe.

c) Konvergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gegen  $s \in \mathbb{K}$ , so heißt die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  *konvergent* und wir setzen  $s := \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ . Andernfalls, heißt die Reihe *divergent*.

**3.2 Beispiele.** a) Die *geometrische Reihe*. Es sei  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ . Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q},$$

$$\text{denn } s_n = \sum_{j=0}^n q^j \stackrel{1.11 \text{ b)}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \stackrel{n \rightarrow \infty}{\underset{1.7b)}{\rightarrow}} \frac{1}{1-q}.$$

b) Die *harmonische Reihe*. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist divergent. Betrachtet man die Differenz der Partialsummen  $s_{2n} - s_n$  für  $n \geq 1$ , so gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Dies bedeutet, dass die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Cauchyfolge ist und somit die harmonische Reihe divergiert.

c) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  ist konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

In der Tat gilt  $\frac{1}{j(j+1)} = \underbrace{\frac{j}{j+1}}_{=:c_j} - \underbrace{\frac{j-1}{j}}_{=:c_{j-1}}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Setzen wir  $c_n := \frac{n}{n+1}$ , so ist

$$c_n = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j - c_{j-1})$$

eine sogenannte *Teleskopsumme* und es gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Analog zur Situation von Folgen, in welcher das Cauchy Kriterium 2.11 ein inneres Kriterium für die Konvergenz einer Folge darstellte, existiert auch für Reihen ein solches inneres Kriterium. Genauer gilt das folgende Lemma.

**3.3 Lemma.** (Cauchy Kriterium für Reihen). *Die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  konvergiert genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit*

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

*Beweis.* Der Beweis ist einfach. Da  $\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| = |s_m - s_{n-1}|$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $m, n \geq N_0$  gilt, folgt die Behauptung aus dem Cauchy Kriterium für Folgen; vgl. Theorem 2.11.  $\square$

Wählen wir in obigem Lemma 3.3 speziell  $n = m$ , so folgt, dass die Glieder einer konvergenten Reihe notwendigerweise eine Nullfolge bilden. Wir halten diesen wichtigen Sachverhalt explizit im folgenden Korollar fest.

**3.4 Korollar.** *Es sei  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  eine konvergente Reihe. Dann ist  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = 0$ .*

Das Beispiel der harmonische Reihe zeigt, dass die Umkehrung von Korollar 3.4 nicht gilt.

**3.5 Bemerkung.** Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit positiven Folgengliedern, d.h. es gelte  $a_j \geq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

*Beweis.* Es sei  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  eine konvergente Reihe, welches bedeutet, dass die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Satz 1.6 impliziert nun, dass die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

Umgekehrt ist  $(\sum_{j=1}^n a_j)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton steigende Folge, da  $a_j \geq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  gilt. Nach Voraussetzung ist die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, welches nach Satz 1.12 bedeutet, dass  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist. □

**3.6 Beispiel.** Wir betrachten die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  und zeigen im Folgenden, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

gilt, wobei die Zahl  $e$  bereits in Satz 1.15 als  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  definiert wurde.

Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ . Der Beweis von Satz 1.15 impliziert, dass  $a_n \leq \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \leq 3$  für alle  $n \geq 1$  gilt. Deswegen ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$s_n := \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

beschränkt und die obige Bemerkung 3.5 impliziert, dass  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$  konvergiert. Wir bezeichnen den Grenzwert der Reihe mit  $e' := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ . Lemma 1.9 impliziert, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e'$  gilt. Also gilt  $e \leq e'$ .

Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung:  $e \geq \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . In der Tat gilt für  $n > m \geq 1$

$$a_n \stackrel{\text{Binom.Satz}}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} \geq \sum_{j=0}^m \binom{n}{j} \frac{1}{n^j} = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \underbrace{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-j+1}{n}}_{\substack{\text{j-Faktoren} \\ \rightarrow 1(n \rightarrow \infty)}}.$$

Nach Lemma 1.9 gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \geq \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!}$ , also  $e \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} = e'$ . Zusammenfassend gilt also  $e' = e$  und die obige Behauptung ist bewiesen.

Um Abschätzungen für die Eulersche Zahl  $e$  zu gewinnen, betrachte

$$d_{n,k} := s_{n+k} - s_n, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für beliebige  $n, k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq d_{n,k} \leq \frac{s_k - 1}{(n+1)!};$$

für  $k \rightarrow \infty$  ergibt sich somit

$$(3.1) \quad \frac{1}{(n+1)!} \leq e - s_n \leq \frac{e - 1}{(n+1)!}.$$

Obige Abschätzung liefert für  $n = 2$  nicht nur die Abschätzung  $2,66 < e < 2,8$ , sondern sie ist auch Grundlage für den folgenden Beweis der Irrationalität der Eulerschen Zahl  $e$ .

**3.7 Satz.** *Die Eulersche Zahl  $e$  ist irrational.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $e$  rational wäre. Dann könnte man  $e$  in der Form  $e = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  darstellen. Betrachtet man die obige Abschätzung (3.1) für  $n = q$  und multipliziert diese Ungleichung mit  $q!$ , so folgt

$$0 < \frac{1}{q+1} \leq p(q-1)! - q!s_q < \frac{2}{q+1} \leq 1,$$

und somit

$$0 < p(q-1)! - q!s_q < 1.$$

Da jedoch  $p(q-1)! - q!s_q \in \mathbb{Z}$  gilt, ist dies unmöglich und wir erhalten einen Widerspruch. □

Wir untersuchen im Folgenden die Konvergenz von Reihen, deren Folgenglieder alternierende Vorzeichen haben und beginnen mit dem Konvergenzkriterium von Dirichlet.

**3.8 Satz.** (Konvergenzkriterium von Dirichlet). *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  eine komplexe Folge derart, dass die Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{j=1}^n a_j)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt sind. Ferner sei  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist  $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j$  konvergent.*

Ein wichtige Folgerung hieraus ist das sogenannte Leibniz-Kriterium.

**3.9 Korollar.** (Leibniz-Kriterium). *Es sei  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert  $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \varepsilon_j$ .*

**3.10. Beispiele und Bemerkungen.** a) Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

ist konvergent und heißt *alternierende harmonische Reihe*. Wir zeigen in Analysis II, dass der Grenzwert der Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{j+1}$  gleich  $\log 2$  ist.

b) Eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$  mit  $a_j \geq 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  heißt *alternierend*.

*Beweis* von Satz 3.8. Für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n$  setze

$$\sigma_{n,m} := \sum_{j=n}^m \varepsilon_j a_j.$$

Die Voraussetzung besagt, dass  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$  gilt. Nach Lemma 3.3 (dem Cauchy Kriterium) genügt es also zu zeigen, dass eine Konstante  $M > 0$  existiert mit

$$|\sigma_{n,m}| \leq M \varepsilon_n \quad \text{für alle } n, m \geq 1.$$

Wir setzen  $C := \sup\{|s_n| : n \in \mathbb{N}\}$ , wobei  $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$ . Für  $m \geq n \geq 1$  gilt dann

$$\begin{aligned} \sigma_{n,m} &= \sum_{j=n}^m \varepsilon_j a_j = \sum_{j=n}^m \varepsilon_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{j=n}^m \varepsilon_j s_j - \sum_{j=n}^m \varepsilon_j s_{j-1} \\ &= \sum_{j=n}^m \varepsilon_j s_j - \sum_{j=n-1}^{m-1} \varepsilon_{j+1} s_j = \sum_{j=n}^{m-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) s_j + \varepsilon_m s_m - \varepsilon_n s_{n-1}. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} |\sigma_{n,m}| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \underbrace{(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1})}_{\geq 0} |s_j| + \varepsilon_m |s_m| + \varepsilon_n |s_{n-1}| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) C + \varepsilon_m C + \varepsilon_n C \\ &= (\varepsilon_n - \varepsilon_m) C + \varepsilon_m C + \varepsilon_n C = 2\varepsilon_n C = M \varepsilon_n \end{aligned}$$

mit  $M := 2C$  und die Behauptung folgt aus dem Cauchy Kriterium 3.3. □

Ein sehr wichtiger Konvergenzbegriff von Reihen ist der der absoluten Konvergenz.

**3.11 Definition.** (Absolute Konvergenz). Eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  heißt *absolut konvergent*, falls  $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$  konvergiert.

**3.12 Bemerkung.** Wir folgern aus dem Cauchy Kriterium für Reihen, Lemma 3.3, dass jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  konvergiert. In der Tat folgt aus der Dreiecksungleichung, dass  $|\sum_{j=n}^m a_j| \leq \sum_{j=n}^m |a_j|$  für alle  $m \geq n$  gilt. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 3.3.

**3.13 Satz.** (Majorantenkriterium). *Es seien  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  und  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$  Folgen mit  $|a_j| \leq b_j$  für fast alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ , so ist die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  absolut konvergent.*

In der obigen Situation heißt die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  eine *Majorante* von  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ .

Der Beweis von Satz 3.13 ist wiederum einfach. Da  $\sum_{j=n}^m |a_j| \leq \sum_{j=n}^m b_j$  für alle  $m \geq n$  gilt, folgt die Behauptung aus dem Cauchy Kriterium, Lemma 3.3.

**Beispiel.** Nach Beispiel 3.2 c) konvergiert die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ . Da  $0 < \frac{1}{(j+1)^2} \leq \frac{1}{j(j+1)}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  gilt, folgt, dass die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$  konvergiert.

Wir wählen nun als Majorante speziell die geometrische Reihe und erhalten damit das sogenannte Wurzelkriterium.

**3.14 Satz.** (Wurzelkriterium). *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ .*

a) *Es existiere  $0 < q < 1$  mit*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

*Dann ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.*

b) *Gilt  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , so divergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .*

*Beweis.* a) Nach Voraussetzung existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$  für alle  $n \geq N_0$ . Also ist  $|a_n| \leq q^n$  für alle  $n \geq N_0$ , d.h. es gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ . Die Behauptung folgt jetzt aus dem obigen Majorantenkriterium 3.13.

b) Die Voraussetzung besagt, dass  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $j \in \mathbb{N}$  gilt. Also ist  $|a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  keine Nullfolge, welches bedeutet, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergiert. □

**Beispiel.** Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^l}{2^n}$  ist konvergent für jedes  $l \in \mathbb{N}$ . Nach Bemerkung I. 1.14 und Beispiel 1.16 c) gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^l}}{2} = \frac{(\sqrt[n]{n})^l}{2} \rightarrow \frac{1}{2};$$

also ist  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{2}{3} =: q < 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und die Behauptung folgt aus dem obigen Wurzelkriterium.

In konkreten Fällen oft einfacher anzuwenden ist das folgende Quotientenkriterium.

**3.15 Satz.** (Quotientenkriterium).

a) Es gelte  $a_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und es existiere  $0 < q < 1$  mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut.

b) Gilt  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  für fast alle (nicht nur für unendlich viele)  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.

*Beweis.* a) Nach Voraussetzung existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| \leq q$  für alle  $j \geq N_0$ . Also gilt für alle  $n \geq N_0 + 1$

$$\left| \frac{a_n}{a_{N_0}} \right| \stackrel{*}{=} \prod_{j=N_0}^{n-1} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \left| \frac{a_{N_0+1}}{a_{N_0}} \frac{a_{N_0+2}}{a_{N_0+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} q^{n-N_0}.$$

Daher ist  $|a_n| \leq \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} q^n$  für alle  $n \geq N_0 + 1$  und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} q^n$$

ist eine konvergente Majorante von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Das Majorantenkriterium impliziert nun die Behauptung.

b) Die Voraussetzung und die obige Relation (\*) implizieren, dass  $\left| \frac{a_n}{a_{N_0}} \right| \geq 1$  für alle  $n \geq N_0 + 1$  gilt. Deshalb ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  keine Nullfolge und die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist divergent.  $\square$

**3.16 Beispiel.** Die *Exponentialreihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$$



konvergiert für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dies ist klar für  $z = 0$ . Für  $z \neq 0$  gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!} \frac{n!}{|z^n|} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h. es gilt  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1}{2}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir betrachten nun eine Variante des obigen Wurzel- bzw. Quotientenkriteriums in der die Existenz einer Zahl  $q$  mit  $0 < q < 1$  durch eine Bedingung an den Limes superior, bzw. Limes inferior ersetzt wird.

**3.17 Satz.** (Andere Formulierung des Wurzel- bzw. Quotientenkriterium).

- a) Gilt  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.
- b) Gilt  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.
- c) Es seien  $a_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.
- d) Gilt  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , so ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergent.

**3.18 Bemerkungen.** a) Gilt  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , so kann man *keine* Aussage zur Konvergenz treffen! Betrachtet man zum Beispiel die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt nach Beispiel 1.16 c) und Bemerkung I. 1.14 für beide Folgen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und}$$

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

aber die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent, während die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  absolut konvergiert.

b) Das Quotientenkriterium ist „schwächer“ als das Wurzelkriterium, im Sinne, dass

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

gilt.

Wir beenden diesen ersten Abschnitt über die Konvergenz von Reihen mit dem Verdichtungssatz von Cauchy.

**3.19 Satz.** (Verdichtungssatz von Cauchy). *Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ konvergiert} \iff \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} \text{ konvergiert.}$$

Der obige Satz besagt, dass sich das Konvergenzverhalten einer gegebenen Reihe vollständig aus dem der „verdichteten“ Reihe ablesen lässt, welche jedoch nur Glieder mit den Indizes  $2^j$ , also bedeutend weniger als die ursprüngliche Reihe, enthält.

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte die Partialsummen der ursprünglichen Reihe  $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$  und der verdichteten Reihe  $t_n := \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$ .

„ $\implies$ “: Für  $n \geq 2^j$  gilt wegen der Monotonie von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots + (a_{2^{j-1}+1} + \cdots + a_{2^j}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{j-1}a_{2^j} \\ &= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^j a_{2^j}) = \frac{1}{2}t_j. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  konvergent, d.h. es gilt  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j =: s$  für ein  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $t_j \leq 2s$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  und die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$  konvergiert nach der obigen Bemerkung 3.5.

„ $\impliedby$ “: Für  $n \leq 2^{j+1} - 1$  gilt

$$\begin{aligned} s_n &\leq a_0 + a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots + (a_{2^j} + \cdots + a_{2^{j+1}-1}) \\ &\leq a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^j a_{2^j} = a_0 + t_j. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$  konvergent, d.h. es gilt  $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} =: t$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ . Also ist  $s_n \leq a_0 + t$  für alle  $n \geq 0$  und die Bemerkung 3.5 impliziert, dass die Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  konvergiert. □

Der obige Satz impliziert, dass zum Beispiel die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

für  $\alpha \in \mathbb{Q}$  genau dann konvergiert, wenn  $\alpha > 1$  gilt. Die zugehörige verdichtete Reihe ist

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j 2^{-j\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)j} = \sum_{j=0}^{\infty} q^j \quad \text{mit } q := 2^{1-\alpha}$$

ist eine geometrische Reihe und diese konvergiert nach Beispiel 3.2 a) genau dann, wenn  $q < 1$  und somit  $\alpha > 1$  ist. Man beachte, dass wir hier vorläufig  $n^\alpha$  nur für  $\alpha \in \mathbb{Q}$  definiert haben; später definieren wir  $n^\alpha$  für beliebige  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Die durch die konvergente Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

(vorläufig für  $s \in \mathbb{Q}$ ) definierte Funktion, ist die berühmte *Riemannsche Zetafunktion*. Sie spielt bei Untersuchungen zur Primzahlverteilung eine herausragende Rolle. Wir werden später in der Vorlesung „Analysis II“ beweisen, dass  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$  gilt. Die bis heute ungelöste sogenannte Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion den Realteil  $\frac{1}{2}$  haben.

## 4 Umordnungen und Produkte von Reihen

Summieren wir endliche viele reelle oder komplexe Zahlen, so hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge der Summation ab, d.h. eine beliebige Umordnung der Summanden führt zur gleichen Summe. Völlig anders stellt sich die Situation bei unendlichen Reihen dar. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass es hier durch Umordnen der Summanden möglich ist, den Reihenwert zu ändern oder dass man durch Umordnen sogar konvergente Reihen in divergente Reihen überführen kann. Dieser, auf den ersten Blick, sehr überraschende Sachverhalt tritt jedoch nicht bei absolut konvergenten Reihen auf. Nicht zuletzt deswegen ist der im vorigen Abschnitt eingeführte Begriff der absoluten Konvergenz so wichtig. Für eine präzise Beschreibung der Situation müssen wir natürlich zunächst den Begriff einer Umordnung definieren. Wir beginnen mit einem Beispiel und betrachten die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j} + \dots,$$

sowie einer Umordnung hiervon, welche durch

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots + \frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} + \dots$$

gegeben ist. Wir bezeichnen mit  $s_n$  bzw.  $t_n$  die  $n$ -te Partialsumme der ursprünglichen bzw. der umgeordneten Reihe und setzen  $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{2} & 2t_3 &= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & 2t_6 &= \frac{1}{2} + 2 \underbrace{\left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right)}_{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \\ s_6 &= \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) & 2t_9 &= \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + 2 \underbrace{\left( \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right)}_{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}, \end{aligned}$$

und wegen  $\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j} \right)$ , folgt  $2t_{3n} = s_{2n}$  für alle  $n \geq 1$ . Da die Folge  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$  konvergiert und die Glieder der umgeordneten Reihe gegen 0 konvergieren, existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so dass zugleich  $|t_{3n} - \frac{s}{2}| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $|t_{3n+1} - t_{3n}| < \frac{\varepsilon}{2}$  und  $|t_{3n+2} - t_{3n}| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n \geq N_0$  gilt. Daraus folgt  $|t_m - \frac{s}{2}| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $m > 3N_0 + 2$ , welches bedeutet, dass die umgeordnete Reihe gegen  $s/2$  konvergiert! Dieses Beispiel motiviert die folgende Definition.

**4.1 Definition.** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe komplexer Zahlen und  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine bijektive Abbildung. Dann heißt  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$  eine *Umordnung* der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ . Ferner heißt die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  *unbedingt konvergent*, falls jede Umordnung der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  den gleichen Grenzwert besitzt.

**4.2 Satz.** Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ist unbedingt konvergent.

*Beweis.* Wir bezeichnen mit  $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$  die  $n$ -te Partialsumme der gegebenen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und für eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  sei  $t_n := \sum_{j=0}^n a_{\varphi(j)}$  die  $n$ -te Partialsumme einer Umordnung. Wir zeigen, dass  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s$  konvergiert wobei  $s$  den Grenzwert der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet. Nach Voraussetzung ist die Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  absolut, d.h. für  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus diesem Grunde gilt

$$\left| s - \sum_{j=0}^{N_0-1} a_j \right| = \left| \sum_{j=N_0}^{\infty} a_j \right| \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wählt man nun  $N_1 \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\{0, 1, 2, \dots, N_0 - 1\} \subset \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(N_1)\}$  gilt, so folgt für alle  $m \geq N_1$

$$\left| \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} - s \right| \leq \left| \sum_{j=0}^m a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{N_0-1} a_j \right| + \underbrace{\left| \sum_{j=0}^{N_0-1} a_j - s \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \leq \sum_{j=N_0}^{\infty} |a_j| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge der Partialsummen  $(t_m)$  der umgeordneten Reihe ebenfalls gegen  $s$  und die Aussage ist bewiesen. □

Der folgende auf Riemann zurückgehende Satz ist ziemlich überraschend.

**4.3 Satz.** (Riemannscher Umordnungssatz). *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann existiert zu jedem  $b \in \mathbb{R}$  eine Umordnung der Reihe, welche gegen  $b$  konvergiert.*

Der Riemannsche Umordnungssatz impliziert die sehr bemerkenswerte und überraschende Tatsache, dass man in einer konvergenten Reihe, welche nicht absolut konvergiert, nur höchstens endlich viele Summanden umordnen darf: ansonsten ergibt der Begriff einer konvergenten Reihe keinen Sinn mehr! Der obige Satz 4.2 hingegen besagt, dass der Wert einer absolut konvergenten Reihe invariant unter Umordnungen ist.

Den Riemannschen Umordnungssatz werden wir an dieser Stelle nicht beweisen und verweisen in diesem Zusammenhang zum Beispiel auf das Buch von Mangold/Knopp.

Wir wollen im Folgenden zwei konvergente Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  miteinander multiplizieren und betrachten hierzu das Produkt

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + \dots).$$

Ausmultiplizieren ergibt, dass wir Terme der folgenden Form aufsummieren müssen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots & & \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & \dots & & & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & & & \end{array}$$

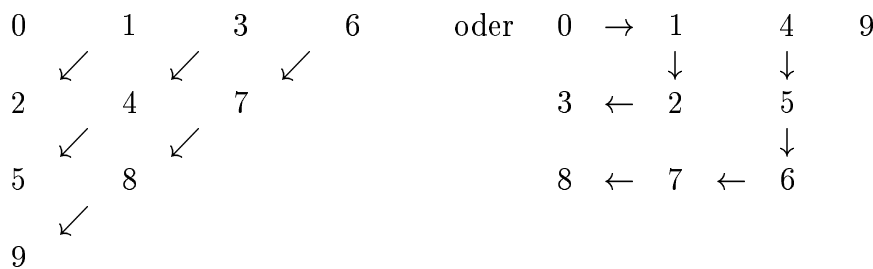
Es stellt sich dann die Frage in welcher Reihenfolge die Summanden aufsummiert werden sollen. Insbesondere fragen wir nach Bedingungen, welche eine Darstellung der Produktreihe in der Form

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

mit Summanden der Gestalt

$$p_j = a_l b_m \quad \text{für } l, m \in \mathbb{N}$$

garantieren. Wir skizzieren zwei mögliche Reihenfolgen der Summation:



und nennen eine Reihe  $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$  eine *Produktreihe* von  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ , falls die Folge  $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$  genau aus den Produkten  $a_l b_m$  für  $l, m \in \mathbb{N}$  besteht; genauer gesagt, falls eine bijektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $a_l b_m = p_{\varphi(l,m)}$  für alle  $l, m \in \mathbb{N}$ .

**4.4 Satz.** Sind  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  zwei absolut konvergente Reihen, so konvergiert jede ihrer Produktreihen gegen

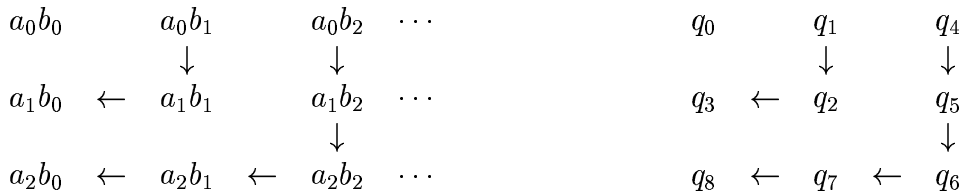
$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right).$$

*Beweis.* Es sei  $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$  eine beliebige Produktreihe der Reihen  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ . Dann existiert für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{j=0}^n |p_j| \leq \sum_{j=0}^m |a_j| \sum_{j=0}^m |b_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.$$

Wir folgern aus Bemerkung 3.5, dass  $\sum_{j=0}^{\infty} |p_j|$  konvergiert. Ferner folgt aus Bemerkung 3.12, dass auch  $\sum_{j=0}^{\infty} p_j$  konvergiert und Satz 4.2 impliziert, dass die Konvergenz unbedingt (d.h. unabhängig von der gewählten Reihenfolge) ist. Dies bedeutet dass jede Produktreihe gegen ein und dasselbe  $s \in \mathbb{C}$  konvergiert. □

Wir betrachte nun spezielle Produktreihen, in welchen die Reihenfolge der Summation durch das folgende Schema vorgegeben ist:

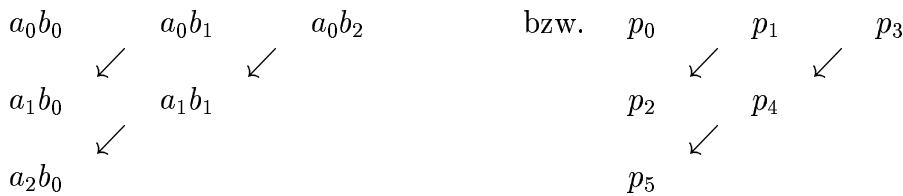


Es gilt also

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_{(n+1)^2-1} = \underbrace{(a_0 + \cdots + a_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_j} \underbrace{(b_0 + \cdots + b_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_j},$$

was die Behauptung impliziert. □

Wählen wir für die Summation die folgende Reihenfolge



und setzen wir  $c_0 := a_0b_0$ ,  $c_1 := a_0b_1 + a_1b_0$  und allgemeiner

$$c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

so erhalten wir das folgende Korollar.

**4.5 Korollar.** (Cauchyprodukt von Reihen). *Es seien  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut konvergente Reihen und sei*

$$c_n := \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  absolut und es gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die obige Folgerung 4.5 im Allgemeinen für Reihen, welche nur konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, nicht richtig ist.

Zum Abschluss des Abschnitts betrachten wir die *Exponentialreihe*, welche durch

$$\exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

gegeben ist. Das Quotientenkriterium 3.15 kombiniert mit dem Beispiel 3.16 impliziert, dass  $\exp(z)$  eine für alle  $z \in \mathbb{C}$  absolut konvergente Reihe ist. Ferner gilt die wichtige *Funktionalgleichung* der Exponentialreihe.

**4.6 Korollar.** Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z) \exp(w) = \exp(z + w).$$

*Beweis.* Der Beweis ist eine Anwendung des oben bewiesenen Cauchyprodukts von Reihen. In der Tat gilt für  $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}\right) \stackrel{\text{Cauchyprodukt 4.5}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} z^j w^{n-j} \stackrel{\text{Bin. Satz}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \exp(z+w). \end{aligned}$$

□

Die Funktionalgleichung der Exponentialreihe impliziert unmittelbar weitere Eigenschaften der Exponentialreihe.

**4.7 Korollar.**

- Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt  $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ . Insbesondere ist  $\exp(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .
- Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) > 0$ .
- Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\exp(m) = e^m$ .
- Für alle  $q \in \mathbb{Q}$  gilt  $\exp(q) = e^q$ .

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.



## 5 Potenzreihen

Potenzreihen haben eine lange Tradition in der Analysis. Stellt man zum Beispiel eine Funktion  $f$  in der Form  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  dar, so spricht man von der Entwicklung einer Funktion  $f$  in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt  $x_0$ . Die allgemeine Theorie solcher Entwicklungen werden wir erst später in der Vorlesung „Funktionentheorie“ noch genauer kennenlernen, wo die volle Bedeutung der Potenzreihen als wichtiges Werkzeug der Analysis zum Vorschein kommt.

Neben diesen grundsätzlichen Eigenschaften, interessieren wir uns für Potenzreihen auch deswegen, da ihre Konvergenztheorie durch den sogenannten Konvergenzradius beschrieben werden kann. Wir beginnen mit der folgenden Definition.

**5.1 Definition.** Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  eine komplexe Folge und  $z \in \mathbb{C}$ . Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

*Potenzreihe.*

Wir gehen im Folgenden der Frage nach, für welche  $z \in \mathbb{C}$  die obige Reihe konvergiert und führen hierzu den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe ein.

**5.2 Definition.** Für  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$  heißt

$$\varrho := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

der *Konvergenzradius* der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , wobei  $\frac{1}{0} := \infty$  und  $\frac{1}{\infty} := 0$  gesetzt ist. Diese Definition des Konvergenzradius heißt auch *Formel von Cauchy-Hadamard*.

Wir bezeichnen im Folgenden die Menge

$$B_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$$

als den *Konvergenzkreis* der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Das folgende Theorem bildet das Hauptresultat dieses Abschnitts.

**5.3 Theorem.** Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\varrho$ . Dann gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

a) Ist  $|z| < \varrho$ , so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  absolut konvergent.

- b) Ist  $|z| > \varrho$ , so ist  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  divergent.  
 c) Ist  $|z| = \varrho$ , so ist keine Aussage zur Konvergenz möglich.

*Beweis.* Der Beweis ist nur eine Anwendung des Wurzelkriteriums. Da  $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$  gilt, folgt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Leftrightarrow |z| < \varrho.$$

Das Wurzelkriterium 3.14 impliziert daher die Aussage des Satzes, d.h. es gilt

- a)  $|z| < \varrho \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  konvergiert absolut.  
 b)  $|z| > \varrho \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  divergiert.  
 c)  $|z| = \varrho \Rightarrow$  keine Aussage ist möglich.

□

**5.4 Bemerkung.** Neben dem Wurzelkriterium kann auch das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzradius verwandt werden. Genauer gesagt, sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe, für welche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q$$

gilt. Dann besitzt die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  den Konvergenzradius  $\varrho = \frac{1}{q}$ . Zum Beweis notieren wir, dass

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \rightarrow q |z|, \quad (n \rightarrow \infty)$$

gilt. Ist  $0 < q < \infty$ , so wählen wir  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_1| < 1/q$  und  $|z_2| > 1/q$  und das Quotientenkriterium impliziert, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$  absolut konvergiert, die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$  hingegen divergiert. Nach Theorem 5.3 gilt somit  $\varrho = 1/q$ . Die Fälle  $q = 0$  und  $q = \infty$  werden ähnlich bewiesen.

**5.5 Beispiele.** a) Die Exponentialreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  hat den Konvergenzradius  $\varrho = \infty$ , denn es gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

und nach obiger Bemerkung 5.4 ist  $\varrho = \frac{1}{q} = \infty$ .

b) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$  hat den Konvergenzradius  $\varrho = 0$ , denn es ist

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n = \infty,$$

und daher  $\varrho = 0$ .

c) Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$  hat den Konvergenzradius  $\varrho = e$ . Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

# III Stetige Funktionen und Topologische Grundlagen

## 1 Stetige Funktionen

Wir beginnen dieses Kapitel mit der Untersuchung stetiger Funktionen und ihrer Eigenschaften. Der von uns im Folgenden verwandte Begriff der Stetigkeit geht, wie schon der Konvergenzbegriff, im wesentlichen auf Cauchy zurück, der in seinem *Cours d'Analyse* (1821) die Stetigkeit einer Funktion wie folgt definierte: *En d'autres termes, la fonction  $f(x)$  restera continue par rapport à  $x$  entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.* Cauchy verwendet noch die damals übliche Bezeichnung der unendlich kleinen Größe (*quantité infiniment petite*), welche aber im Laufe der Zeit durch die heute gebräuchliche  $\varepsilon\delta$ -Formulierung abgelöst wurde. Letztere wurde wesentlich durch Weierstraß beeinflusst.

Wir erinnern zunächst noch einmal an die Definition einer Funktion. Hierzu seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion, d.h. eine Vorschrift welche auf *eindeutige* Weise jedem  $x \in X$  ein Element  $y \in Y$  zuordnet. Die Menge

$$\text{Graph } f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

nennen wir den *Graph* von  $f$ .

Wir beginnen mit der Definition der Stetigkeit einer Funktion, welche auf dem Konvergenzbegriff für Folgen aufbaut.

**1.1 Definition.** (Folgenstetigkeit). Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *stetig in*  $x_0 \in D$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Mit anderen Worten ist  $f$  in  $x_0 \in D$  genau dann stetig, wenn

$$(x_n) \subset D, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

gilt. Die Funktion  $f$  heißt *stetig in*  $D$ , falls  $f$  in allen Punkten  $x_0 \in D$  stetig ist.

Der folgende Satz ist eine Umformulierung der Definition der Stetigkeit in die  $\varepsilon - \delta$  Sprache, wie wir sie abgewandelt schon aus der Konvergenztheorie für Folgen und Reihen kennen.

**1.2 Satz.** ( $\varepsilon - \delta$ -Kriterium der Stetigkeit). *Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  ist im Punkte  $x_0 \in D$  genau dann stetig, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert derart, dass gilt:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

In Quantoren geschrieben bedeutet dies:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ so dass } x \in D, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

*Beweis. " $\implies$ ":* Wir nehmen an die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $\delta > 0$  ein  $x_\delta \in D$  existiert mit

$$|x_0 - x_\delta| < \delta \text{ und } |f(x_0) - f(x_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  existiert daher ein  $x_n \in D$  mit  $|x_n - x_0| < 1/n$  und  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ . Damit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , aber  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht gegen  $f(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Widerspruch!

*" $\impliedby$ ":* Nach Voraussetzung existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D$  welche gegen  $x_0$  konvergiert, so existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| < \delta$  für alle  $n \geq N_0$ . Daher ist  $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N_0$  und somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ . □

- 1.3 Beispiele.** a) Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  stetig, denn  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  impliziert  $f(x_n) = ax_n + b \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ax + b = f(x)$ .
- b) Die Betragsfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  ist stetig.
- c) Die *Heavyside-Funktion*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = 1$  für  $x > 0$  und  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  ist stetig für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , aber unstetig in 0.
- d) Die Funktion  $f$  gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

ist stetig in 0, da man wegen  $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$  zum Beispiel  $\delta = \varepsilon$  wählen kann.

- e) Die *Dirichletsche Sprungfunktion* gegeben durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in allen Punkten  $x \in \mathbb{R}$  unstetig. Beweis als Übungsaufgabe.

- f) Wir betrachten eine Modifikation der Dirichletschen Sprungfunktion und definieren  $f$  durch

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \text{mit } q > 0 \text{ minimal} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann ist  $f$  in allen irrationalen Punkten  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  stetig, hingegen unstetig in allen rationalen Punkten  $x_0 \in \mathbb{Q}$ ! Den Beweis überlassen wir wiederum als Übungsaufgabe.

- g) Es sei  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft, dass ein  $L > 0$  existiert mit

$$(1.1) \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in D.$$

Dann ist  $f$  stetig, denn wählt man für  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  als  $\delta := \frac{\varepsilon}{L+1}$ , so folgt die Behauptung aus der Definition. Eine Funktion, welche der obigen Bedingung (1.1) genügt, heißt *Lipschitzstetig* und  $L$  heißt die *Lipschitzkonstante* von  $f$ .

- h) Jede Lipschitzstetige Funktion  $f$  ist stetig. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Betrachte hierzu zum Beispiel die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = \sqrt{x}$ . Dann ist  $f$  stetig, aber nicht Lipschitzstetig.

- i) Die Funktionen  $f_1, \dots, f_4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  seien definiert durch

$$f_1(z) = |z|, \quad f_2(z) = \bar{z}, \quad f_3(z) = \operatorname{Re} z, \quad f_4(z) = \operatorname{Im} z.$$

Dann sind die Funktionen  $f_1, \dots, f_4$  Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, also insbesondere stetig.

Die obige Definition der Stetigkeit via Folgen erlaubt es unsere Kenntnisse über konvergente Folgen auf stetige Funktionen zu übertragen. Genauer gesagt definieren wir zunächst die Summe, das Produkt und den Quotienten zweier Funktionen. Hierzu seien  $f, g : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  zwei Funktionen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g &: D \rightarrow \mathbb{K}, & (\alpha f + \beta g)(x) &:= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ f \cdot g &: D \rightarrow \mathbb{K}, & (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \frac{f}{g} &: \{x \in D : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}, & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

so gilt der folgende Satz.

**1.4 Satz.** *Es seien  $f, g : D \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  zwei in  $x_0 \in D$  stetige Funktionen und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- a) *Die Summe  $\alpha f + \beta g : D \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig in  $x_0 \in D$ .*
- b) *Das Produkt  $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig in  $x_0$ .*
- c) *Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  mit  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_\delta(x_0) \cap D$  und die Funktion  $\frac{f}{g} : U_\delta(x_0) \cap D \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig in  $x_0$ .*

*Beweis.* Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus der Definition 1.1 und den Rechenregeln für konvergente Folgen.

c) Nach Voraussetzung ist  $|g(x_0)| =: \gamma > 0$ . Da nach Voraussetzung ferner  $g$  in  $x_0$  stetig ist, folgt

$$|g(x_0)| - |g(x)| \leq |g(x_0) - g(x)| < \frac{\gamma}{2}, \quad x \in U_\delta(x_0) \cap D$$

für ein  $\delta > 0$ . Daher ist  $|g(x)| > \frac{\gamma}{2}$  für alle  $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ . Die Behauptung folgt nun aus den Rechenregeln für konvergente Folgen. □

Als nächstes betrachten wir die Verknüpfung zweier Funktionen  $f : D_f \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g : D_g \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $g(D_g) \subset D_f$ . Wir definieren  $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{K}$  als

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad x \in D_g.$$

Der folgende Satz besagt, dass die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen wiederum stetig ist.

**1.5 Satz.** *Es seien  $f : D_f \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  und  $g : D_g \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  zwei Funktionen mit  $g(D_g) \subset D_f$ . Ist  $g$  in  $x_0 \in D_g$  und  $f$  in  $g(x_0) \in D_f$  stetig, so ist  $f \circ g$  in  $x_0$  stetig.*

*Beweis.* Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D_g$  eine Folge in  $D_g$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Da  $g$  nach Voraussetzung in  $x_0$  stetig ist, folgt  $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x_0)$ . Wiederum, da  $f$  in  $g(x_0)$  stetig ist, folgt  $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(g(x_0)) = (f \circ g)(x_0)$ . Also ist  $f \circ g$  nach Definition in  $x_0$  stetig. □

**1.6 Beispiele.** a) Alle Polynome, d.h. alle Funktionen der Art

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{mit } a_j \in \mathbb{K}$$

für  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  sind stetig.

b) Sind  $p$  und  $q$  Polynome, so ist die Funktion  $\frac{p}{q}$  gegeben durch

$$\frac{p}{q}(z) := \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{mit } D_{\frac{p}{q}} = \{z \in \mathbb{K} : q(z) \neq 0\}$$

stetig. Solche Funktionen heißen *rationale Funktionen*.

c) Die *Signumfunktion*  $\text{sign} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\text{sign}(z) := \frac{z}{|z|}$  ist stetig.

Potenzreihen sind die natürlichen Verallgemeinerungen der Polynome. Wir zeigen im Folgenden, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen sind. Genauer gilt der folgende Satz.

**1.7 Satz.** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\varrho > 0$ . Dann ist  $f : B_\varrho(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine stetige Funktion.*

*Beweis.* Es seien  $z_0 \in B_\varrho(0)$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $r > 0$  so gewählt, dass  $|z_0| < r < \varrho$  gilt. Theorem II.5.3 impliziert, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  konvergiert, d.h. es existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| r^n < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq r$  gilt dann

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \left| \sum_{n=0}^{N_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N_0} a_n z_0^n \right| + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| |z|^n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| |z_0|^n \\ &\leq |p(z) - p(z_0)| + 2 \underbrace{\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| r^n}_{< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4}} \end{aligned}$$

wobei wir  $p(w) = \sum_{n=0}^{N_0} a_n w^n$  gesetzt haben. Da Polynome stetig sind, existiert ein  $\delta \in (0, r - |z_0|)$  mit  $|p(z) - p(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$  falls nur  $|z - z_0| < \delta$  gilt. Also ist  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$  falls  $|z - z_0| < \delta$  gilt und  $f$  ist somit nach dem  $\varepsilon - \delta$ -Kriterium aus Satz 1.2 stetig.  $\square$

Wenden wir obigen Satz auf die Exponentialfunktion an, so folgt, dass die Exponentialfunktion für alle  $z \in \mathbb{C}$  stetig ist.

**1.8 Korollar.** (Exponentialfunktion). *Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto e^z$  ist stetig.*

Nach Beispiel II.5.5 a) besitzt die Exponentialreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  den Konvergenzradius  $\rho = \infty$ . Die Behauptung folgt daher aus Satz 1.7.

Viele Existenzaussagen in der Analysis beruhen auf dem sogenannten Zwischenwertsatz. Die Notwendigkeit eines Beweises dieses auf den ersten Blick offensichtlichen Satzes geht auf Bolzano zurück. Aus heutiger Sicht handelt es sich bei dem folgenden Satz um eine Variante der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ . Im Folgenden setzen wir wiederum  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .

**1.9 Theorem.** (Zwischenwertsatz). *Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ .*

Der obige Satz ist anschaulich klar, doch Vorsicht ist geboten! Betrachte  $D := \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 2\}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $x \mapsto x^2 - 2$ . Dann ist  $f(1) = -1 < 0$  und  $f(2) = 2 > 0$ , aber es existiert *kein*  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Betrachte die Menge  $M$  definiert durch  $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$ . Da nach Voraussetzung  $f(a) < 0$  gilt, ist  $a \in M$  und  $M \neq \emptyset$ . Ferner ist  $M$  nach oben beschränkt durch  $b$  und das Vollständigkeitsaxiom impliziert daher, dass  $x_0 := \sup M \in [a, b]$  existiert. Wir zeigen im Folgenden, dass  $f(x_0) = 0$  gilt.

Hierzu nehmen wir zunächst an, dass  $f(x_0) < 0$  ist. Dann gilt  $b - x_0 > 0$  und da  $f$  nach Voraussetzung stetig ist, existiert zu  $\varepsilon := \frac{-f(x_0)}{2} > 0$  ein  $\delta \in (0, b - x_0)$  mit

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon \text{ falls } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b].$$



Also ist  $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$  für alle  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$  und es gilt

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] \subseteq M.$$

Insbesondere ist daher  $x_0 + \delta \in M$ , was aber im Widerspruch zur Definition von  $x_0$  steht.

Nehmen wir an, dass  $f(x_0) > 0$  gilt, so ist  $x_0 - a > 0$  und analog zu oben gibt es zu  $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$  wegen der Stetigkeit von  $f$  ein  $\delta \in (0, x_0 - a)$  mit

$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b].$$

Also ist  $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$  für alle  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$  und daher gilt

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b] \cap M = \emptyset.$$

Insbesondere, da  $x_0 - \delta > a$  gilt, ist  $x_0 - \delta$  eine obere Schranke von  $M$  im Widerspruch zur Definition von  $x_0$ . Zusammengefasst gilt also  $f(x_0) = 0$ . □

**1.10 Bemerkungen.** a) Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann nimmt  $f$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an. Mit anderen Worten sei  $c$  so gewählt, dass  $f(a) < c < f(b)$  gilt. Der Zwischenwertsatz impliziert dann, dass ein  $x_0 \in [a, b]$  existiert mit  $f(x_0) = c$ . Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

b) Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten besitzt mindestens eine reelle Nullstelle.

c) Für alle  $y > 0$  existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = y$ . Wir bezeichnen dieses  $x$  als

$$x := \log y$$

und nennen es denn *natürlichen Logarithmus* von  $y$ .

Um diese Eigenschaft einzusehen, notieren wir zunächst, dass für  $n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \dots \geq 1 + n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

gilt. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion impliziert nun  $\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Also existiert für  $y > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\exp(-N_0) < y < \exp(N_0)$ . Die Exponentialfunktion  $\exp : [-N_0, N_0] \rightarrow \mathbb{R}$  ist nach Korollar 1.8 stetig, also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein  $x \in [-N_0, N_0]$  mit  $\exp(x) = y$ . Zum Beweis der Eindeutigkeit von  $x$  nehmen wir an, dass ein  $r \in \mathbb{R}$  existiere mit OBdA  $x < r$  und dass  $\exp x = y = \exp r$  gelte. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion impliziert dann  $\exp(r)/\exp(x) = \exp(h)$  für  $h = r - x$  und da

$$\exp(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots > 1$$

für  $h > 0$  gilt, folgt  $\exp(x) < \exp(r)$  und  $\exp(x) = y < \exp(r)$ . Widerspruch!

Die Funktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \log y$  heißt *Logarithmusfunktion*.

Als weitere Anwendung des Zwischenwertsatzes betrachten wir nun das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion. Hierbei heißen alle folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  *Intervalle*:

$$\begin{aligned} (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ (-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \end{aligned}$$

**1.11 Satz.** (Stetige Bilder von Intervallen). *Es sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist  $f(I)$  wiederum ein Intervall.*

*Beweis.* Es sei  $a := \inf f(I) := \inf\{f(x) : x \in I\}$  und  $b := \sup f(I) := \sup\{f(x) : x \in I\}$ . Nach Definition des Supremums bzw. des Infimums existieren für alle  $\varepsilon > 0$  Zahlen  $a_\varepsilon, b_\varepsilon \in I$  mit  $f(a_\varepsilon) \leq a + \varepsilon$  und  $f(b_\varepsilon) \geq b - \varepsilon$ . Der Zwischenwertsatz impliziert deshalb

$$(a, b) = \bigcup_{\varepsilon > 0} [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} [f(a_\varepsilon), f(b_\varepsilon)] \stackrel{\text{ZWS}}{\subseteq} f(I) \subset [a, b].$$

□

Unser nächstes Ziel ist es, die Umkehrfunktion einer gegebenen stetigen Funktion (sofern sie denn existiert) auf Stetigkeit zu untersuchen. Hierzu führen wir zunächst die folgenden Begriffe ein.

**1.12 Definition.** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  
*monoton steigend*, falls  $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ ,  
*streng monoton steigend*, falls  $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ ,  
*monoton fallend*, falls  $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ ,  
*streng monoton fallend*, falls  $x, y \in D, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ ,  
*monoton*, falls  $f$  monoton steigend oder monoton fallend,  
*streng monoton*, falls  $f$  streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

Wir erinnern an dieser Stelle auch nochmals an die Definition der Injektivität einer Funktion: eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *injektiv*, falls  $f(x_1) = f(x_2)$  immer

$x_1 = x_2$  impliziert. Insbesondere ist eine streng monotone Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv und es ist möglich die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  via der folgenden Vorschrift zu definieren:

$$f^{-1} : f(D) \rightarrow D, f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow y = f(x).$$

Der Graph  $\text{Graph}(f^{-1})$  von  $f^{-1}$  entsteht durch Spiegelung des Graphen  $\text{Graph}(f)$  von  $f$  an der Geraden  $x = y$ , und es gilt

$$\text{Graph}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f^{-1}(D)\} = \{(f(x), x) : x \in D\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun der Frage nach, ob die Umkehrfunktion einer streng monotonen und stetigen Funktion wiederum stetig ist.

**1.13 Satz.** *Es sei  $I$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und streng monotone Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f^{-1}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.*

*Beweis.* OBdA sei  $f$  streng monoton wachsend. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte.

1. Zunächst ist  $f(I) =: J$  ein Intervall nach dem obigen Satz 1.11 und wir setzen  $g := f^{-1} : J \rightarrow I$ .
2. Die Funktion  $g$  ist streng monoton wachsend, denn seien  $s_1 < s_2$  in  $J$ , so folgt  $g(s_1) < g(s_2)$ . Ansonsten wäre  $g(s_1) \geq g(s_2)$  und die Monotonie von  $f$  würde  $s_1 = f(g(s_1)) \geq f(g(s_2)) = s_2$  implizieren. Widerspruch!
3. Die Umkehrfunktion  $g$  ist stetig. Zum Beweis nehmen wir an, dass die Funktion  $g$  in  $s_0 \in J$  unstetig sei. Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Folge  $(s_n) \subset J$  mit

$$|s_n - s_0| < \frac{1}{n} \text{ und } |g(s_n) - g(s_0)| \geq \varepsilon_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Deshalb ist  $s_n \in [s_0 - 1, s_0 + 1]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $g$  eine monotone Funktion ist, existieren  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $t_n := g(s_n) \in [a, b]$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $t_0$ . Da  $f$  stetig ist, konvergiert  $f(t_{n_k})$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen  $f(t_0)$ . Andererseits gilt  $f(t_{n_k}) = s_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s_0$  und die Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert  $s_0 = f(t_0)$ . Deshalb gilt

$$g(s_{n_k}) = t_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_0 = g(s_0),$$

im Widerspruch zur obigen Eigenschaft der Folge  $(g(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Wir beschließen dieses Kapitel mit einer Reihe von Beispielen.

**1.14 Beispiele.** a) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Wurzelfunktion  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  stetig und streng monoton wachsend. Um diese Tatsache einzusehen, betrachte man die Funktion  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $t \mapsto t^n$ . Dann ist  $g$  stetig und streng monoton wachsend, denn für  $0 \leq s < t$  gilt

$$g(t) - g(s) = t^n - s^n = t^n \left(1 - \left(\frac{s}{t}\right)^n\right) > 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus obigem Satz 1.13.

b) Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton wachsend. Wir wiederholen das Argument aus der Bemerkung 1.10 c): da  $e^{x+h}/e^x = e^h$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $h > 0$  gilt, folgt die strenge Monotonie der Exponentialfunktion aus der Abschätzung

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots > 1, \quad h > 0.$$

Ferner ist die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  nach Korollar 1.8 stetig. Der obige Satz über die Umkehrfunktion besagt dann, dass die Logarithmusfunktion  $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \log x$  definiert in Bemerkung 1.10 c) als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ebenfalls stetig ist.

c) Für  $x > 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  definieren wir die *allgemeine Potenz* als

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log x).$$

Dann sind die beiden Funktionen

$$\begin{array}{ll} f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f_x(\alpha) := x^\alpha & \text{für festes } x > 0 \text{ und} \\ g_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, & g_\alpha(x) := x^\alpha & \text{für festes } \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

stetig. Wir notieren an dieser Stelle, dass die obige Definition die bisherige Definition der Potenz für rationale Exponenten aus Bemerkung II.1.14 auf beliebigen Exponenten  $\alpha \in \mathbb{R}$  fortsetzt. Um dies einzusehen, folgern wir für  $x > 0$  und  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  aus der Eindeutigkeit der Wurzel, dass

$$\exp\left(\frac{p}{q} \log x\right) = \exp\left(\frac{\log x}{q}\right)^p = (\sqrt[q]{\exp(\log x)})^p = (\sqrt[q]{x})^p$$

gilt.

d) Ist  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und streng monoton, so ist  $f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  im allgemeinen nicht stetig, falls  $D$  kein Intervall ist. Betrachte zum Beispiel die Funktion  $f : D = [0, 1) \cup \{2\}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{für } x = 2. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  stetig und streng monoton, aber  $f^{-1} : f(D) = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{für } y \in [0, 1) \\ 2, & \text{für } y = 1 \end{cases}$$

ist unstetig in  $y = 1$ .

## 2 Topologische Grundlagen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit dem Begriff des Vektorraums, welcher in der modernen Analysis eine sehr wichtige Rolle spielt. Im gesamten Abschnitt sei der zugrundeliegende Skalarkörper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Wir beginnen zunächst mit dem Begriff des Vektorraums über  $\mathbb{K}$ , wie wir ihn schon aus der Linearen Algebra kennen.

**2.1 Definition.** Ein *Vektorraum über  $\mathbb{K}$* , oder ein  $\mathbb{K}$ -VR ist ein Tripel  $(V, +, \cdot)$  bestehend aus einer Menge  $V \neq \emptyset$ , einer Verknüpfung  $+$ , sowie einer äußeren Verknüpfung  $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ ,  $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , genannt *Skalarmultiplikation* mit folgenden Eigenschaften:

(VR1)  $(V, +)$  ist eine abelsche Gruppe.

(VR2) Es gelten die Distributivgesetze

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v, w \in V.$$

(VR3)  $\lambda \cdot (\mu v) = (\lambda \mu) \cdot v$ ,  $1 \cdot v = v$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$ .

Der Vektorraum heißt *reell* bzw. *komplex*, falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gilt.

Die Elemente von  $V$  heißen *Vektoren*, während die Elemente von  $\mathbb{K}$  *Skalare* heißen. Der Begriff des Vektorraums wird in der Linearen Algebra im Detail diskutiert.

**2.2 Beispiele.** a) Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  sowie  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ . Dann ist  $\mathbb{K}^n$  versehen mit der Addition, bzw. mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \cdot x &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Insbesondere sind also  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  Vektorräume.

b) Für eine Menge  $X$ , ist die Menge  $V^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ ist Abbildung}\}$  versehen mit

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{K}, \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

ein Vektorraum.

c) Die Menge  $c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}\}$  versehen mit der koordinatenweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \\ (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \end{aligned}$$

ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dies folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen.

Wir wollen nun dem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  eine *euklidische Struktur* aufprägen und führen zu diesem Zweck den Begriff des *euklidischen Abstands* zweier Elemente aus  $\mathbb{R}^n$  ein. Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  nennen wir

$$|x - y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

den *euklidischen Abstand* von  $x$  und  $y$ . Insbesondere gilt

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ferner nennen wir die Menge

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$$

für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  die *offene Kugel* mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$ .

Im Folgenden übertragen wir den uns bekannten Konvergenzbegriff für Folgen und Reihen reeller Zahlen auf Folgen und Reihen im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Hierzu erweist es sich als nützlich, einige grundlegende topologische Begriffe für Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  einzuführen. Diese Begriffe gehen vor allem auf FELIX HAUSDORFF zurück.

**2.3 Definition.** a) Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Umgebung* von  $x \in \mathbb{R}^n$ , falls ein  $\varepsilon > 0$  existiert, derart dass  $B_\varepsilon(x) \subset U$  gilt. Die Menge  $B_\varepsilon(x)$  heißt auch  *$\varepsilon$ -Umgebung* von  $x$ .

b) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *offen* in  $\mathbb{R}^n$ , falls zu jedem  $x \in M$  ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass  $B_\varepsilon(x) \subset M$  gilt.

Betrachtet man zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $a < b$ , so ist das Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  eine offene Menge, denn für  $x \in (a, b)$  setzen wir  $\varepsilon := \min\{|a - x|, |b - x|\}$  und es gilt dann  $B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$ . Ferner sind die Intervalle  $(a, \infty)$  und  $(-\infty, a)$  ebenfalls offen. Das Intervall  $[a, b]$  ist nicht offen, denn  $B_\varepsilon(a) \not\subset [a, b]$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Die Kugel  $B_r(x)$  um  $x \in \mathbb{R}^n$  mit Radius  $r > 0$  ist hingegen eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

**2.4 Definition.** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossen* in  $\mathbb{R}^n$ , falls  $M^c := \mathbb{R}^n \setminus M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin M\}$  offen ist in  $\mathbb{R}^n$ .

Beispiele von abgeschlossenen Mengen lassen sich leicht angeben. Wählen wir  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , so ist das Intervall  $[a, b]$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , das Intervall  $(a, b)$  hingegen ist nicht abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ . Das Intervall  $[0, 1)$  ist nicht offen und nicht abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  und die Menge  $Q$  gegeben durch  $Q := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}$  mit  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  und  $a_i \leq b_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ .

In den beiden folgenden Sätzen betrachten wir beliebige Vereinigungen und Durchschnitte offener bzw. abgeschlossener Mengen.

**2.5 Satz.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- a) Die leere Menge  $\emptyset$  sowie  $\mathbb{R}^n$  sind offen in  $\mathbb{R}^n$ .  
 b) Für eine beliebige Indexmenge  $I$  seien  $O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen für alle  $\alpha \in I$ . Dann ist  $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ; mit anderen Worten sind beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen.  
 c) Es seien  $O_1, O_2, \dots, O_N \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen. Dann ist  $\bigcap_{i=1}^N O_i$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ; mit anderen Worten bedeutet dies, dass endliche Schnitte offener Mengen wiederum offen sind.

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Das Beispiel der offenen Intervalle  $I_n := (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$  mit  $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1]$  zeigt, dass beliebige Schnitte offener Mengen nicht wiederum offen sind.

Der zu Satz 2.5 analoge Satz für abgeschlossene Mengen lautet wie folgt.

- 2.6 Satz.** a) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ .  
 b) Beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.  
 c) Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Der Beweis folgt aus dem obigen Satz 2.5 und den De Morganschen Regeln; vgl. die Übungsaufgaben. Man beachte, dass die Aussage c) des obigen Satzes für beliebige Vereinigungen nicht richtig ist, da zum Beispiel die Menge  $B_{\frac{1}{n}}(0)^c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  abgeschlossen ist, aber dies für die Vereinigung  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [B_{\frac{1}{n}}(0)^c] = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  nicht mehr gilt.

Wir führen im Folgenden weitere topologische Grundbegriffe ein.

**2.7 Definition.** a) Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt  $x$  *Randpunkt* von  $M$ , falls jede Umgebung  $U$  von  $x$  sowohl einen Punkt aus  $M$  als auch einen aus  $\mathbb{R}^n \setminus M$  enthält.

b) Die Menge

$$\partial M := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Randpunkt von } M\}$$

heißt *Rand* von  $M$  und

$$\overset{\circ}{M} := M \setminus \partial M$$

wird als *Inneres* von  $M$  bezeichnet. Ein Element  $a \in \overset{\circ}{M}$  heißt *innerer Punkt* von  $M$ .

c) Ferner wird  $x \in \mathbb{R}^n$  als *Häufungspunkt* von  $M \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnet, falls jede Umgebung von  $x$  unendlich viele Elemente von  $M$  enthält.

d) Die Menge

$$\overline{M} := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in M \text{ oder } x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$$

heißt *Abschluss* von  $M$ .

e) Schließlich heißt die Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  *beschränkt*, falls  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$  existieren, so dass  $M \subset B_r(x)$  gilt.

Betrachtet man zum Beispiel die abgeschlossene Einheitskugel  $M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , so ist deren Inneres  $\overset{\circ}{M}$  und der Rand von  $M$  gegeben durch  $\overset{\circ}{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  bzw. durch die Einheitssphäre  $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ . Die folgenden Eigenschaften offener bzw. abgeschlossener Mengen erweisen sich oft als nützlich.

**2.8 Bemerkungen.** (Inneres, Rand, Abschluss). Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  gelten die folgenden Aussagen:

a) Das Innere von  $M$  ist gegeben durch

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup_{O \subseteq M, O \text{ offen}} O.$$

Insbesondere ist  $\overset{\circ}{M}$  offen und  $\overset{\circ}{M}$  ist die größte offene Menge, welche in  $M$  enthalten ist.

b) Der Abschluss von  $M$  ist gegeben durch

$$\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M = \bigcap_{M \subseteq A, A \text{ abg.}} A.$$

Also ist  $\overline{M}$  abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Menge, welche  $M$  enthält.

c) Für den Rand  $\partial M$  von  $M$  gilt  $\partial M = \overline{M} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus M}$ ; also ist  $\partial M$  abgeschlossen.

**2.9 Satz.** (Hausdorffsches Trennungsaxiom) *Es seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y$ . Dann existieren Umgebungen  $U_x$  von  $x$  sowie  $U_y$  von  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .*

Der Beweis ist nicht schwierig: für  $\varepsilon := \frac{|x-y|}{2}$  setzen wir  $U_x := B_\varepsilon(x)$  und  $U_y := B_\varepsilon(y)$  und nehmen an dass ein  $z \in \mathbb{R}^n$  existiere mit  $z \in U_x \cap U_y$ . Dann wäre aber  $2\varepsilon = |x-y| \leq \underbrace{|x-z|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|z-y|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$ . Widerspruch!

Nach unserer Untersuchung der Konvergenz von reellen oder komplexen Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Kapitel II, betrachten wir nun die Konvergenz von Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ . Die Definition der Konvergenz lautet in diesem Fall wie folgt.

**2.10 Definition.** Eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *konvergent* gegen  $a \in \mathbb{R}^n$ , falls für alle Umgebungen  $U$  von  $a$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_j \in U$  für alle  $j \geq N_0$ . In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$ .



Das folgende Resultat besagt, dass eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  genau dann konvergiert, wenn jede ihrer Koordinatenfolgen konvergiert.

**2.11 Lemma.** Eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  konvergiert gegen  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  genau dann, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{l,j} = a_l, \quad l = 1, \dots, n,$$

gilt, d.h. genau dann, wenn die  $l$ -te Koordinatenfolge von  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $a_l$  für alle  $l = 1, \dots, n$  konvergiert.

*Beweis.* „ $\implies$ “: Nach Voraussetzung existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_j - a|^2 = \sum_{l=1}^n |a_{l,j} - a_l|^2 < \varepsilon$  für alle  $j \geq N_0$ . Daher ist  $|a_{l,j} - a_l| \leq |a_j - a| < \varepsilon$  für alle  $l = 1, \dots, n$  und alle  $j \geq N_0$ .

„ $\impliedby$ “: Nach Voraussetzung existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  und zu jedem  $l = 1, \dots, n$  ein  $N_l \in \mathbb{N}$  mit  $|a_{l,j} - a_l| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$  für alle  $j \geq N_l$ . Somit gilt

$$|a_j - a| = \left( \sum_{l=1}^n |a_{l,j} - a_l|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left( \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

für alle  $j \geq N_0 := \max\{N_1, \dots, N_n\}$ . □

Die Verallgemeinerung des Begriffs der Cauchyfolge auf die  $n$ -dimensionale Situation bereitet keine Schwierigkeiten und die folgende Definition ist natürlich.

**2.12 Definition.** Eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  heißt *Cauchyfolge*, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

Der folgende Satz über die Konvergenz von Cauchyfolgen in  $\mathbb{R}^n$  beruht letztendlich wiederum auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

**2.13 Satz.** In  $\mathbb{R}^n$  ist jede Cauchyfolge konvergent.

*Beweis.* Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^n$ . Da

$$|a_{l,n} - a_{l,m}| \leq \left( \sum_{l=1}^n |a_{l,n} - a_{l,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle  $l = 1, \dots, n$  gilt, ist jede Koordinatenfolge  $(a_{l,k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$ . Da  $\mathbb{R}$  vollständig ist, konvergiert daher die Koordinatenfolge  $(a_{l,k})_{k \in \mathbb{N}}$  für jedes  $l = 1, \dots, n$  und die Behauptung folgt aus Lemma 2.11.

□

Der folgende Satz beschreibt die Abgeschlossenheit einer Menge in Termen von konvergenten Folgen.

**2.14 Satz.** (Charakterisierung abgeschlossener Mengen via Folgen). *Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset A$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$  gilt  $a \in A$ .*

*Beweis.* „ $\implies$ “: Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset A$  eine Folge in  $A$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$ . Wir nehmen an, dass  $a$  kein Element von  $A$  sei, d.h. dass  $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$  gelte. Da  $\mathbb{R}^n \setminus A$  nach Voraussetzung offen ist, ist insbesondere  $\mathbb{R}^n \setminus A$  eine Umgebung von  $a$ . Nach Definition der Konvergenz (vgl. Definition 2.10) existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_j \in \mathbb{R}^n \setminus A$  für alle  $j \geq N_0$ . Widerspruch!

„ $\impliedby$ “: Wir nehmen wiederum an, dass die Behauptung falsch sei, d.h. dass  $A^c$  nicht offen sei. Dann existiert ein  $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$  so, dass für alle  $\varepsilon > 0$  die Umgebung  $U_\varepsilon(a)$  nicht in  $\mathbb{R}^n \setminus A$  enthalten ist; also gilt  $U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ . Wählen wir für  $j \in \mathbb{N}$  nun  $a_j \in U_{\frac{1}{j}}(a) \cap A$ , so gilt  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a \notin A$ . Widerspruch!

□

Für eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir ihren *Durchmesser*  $\text{diam} M$  als

$$\text{diam} M := \sup\{|x - y| : x, y \in M\}.$$

Es gilt dann der folgende Satz.

**2.15 Satz.** *Es sei  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  mit*

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

*und  $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam} A_j = 0$ . Dann existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \in \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j$ .*

*Beweis.* Wir beginnen mit der Existenz eines Elements  $x \in \mathbb{R}^n$  mit der gewünschten Eigenschaft. Wählen wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in A_n$ , so existiert nach Voraussetzung ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|x_n - x_m| \leq \text{diam} A_N, \quad n, m \geq N.$$

Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist also eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}^n$  und Satz 2.13 impliziert, dass sie gegen ein  $x \in \mathbb{R}^n$  konvergiert. Da  $x_n \in A_k$  für alle  $n \geq k$  gilt und da jedes  $A_k$  abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.14, dass  $x \in A_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Die Eindeutigkeit von  $x$  ist klar.

□

Wir übertragen schließlich den Begriff der Folgenstetigkeit einer reellen Funktion auf reellwertige Funktionen deren Definitionsbereich eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**2.16 Definition.** Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so heißt  $f$  *stetig* in  $x_0 \in M$ , falls für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ . Falls  $f$  für alle  $x_0 \in M$  stetig ist, so heißt  $f$  *stetig*.

Wir wollen nun die obige Definition der Stetigkeit einer Funktion  $f$  in die Sprache der Umgebungen umformulieren. Genauer gesagt ist eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann stetig in  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , wenn für jede Umgebung  $V$  von  $f(x_0)$  in  $\mathbb{R}$  eine Umgebung  $U$  von  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert mit  $f(U) \subset V$ .

Das folgende Theorem ist eine fundamentale Charakterisierung stetiger Funktionen, welche auch in einem abstrakteren Rahmen noch Bestand hat.

**2.17 Theorem.** Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i)  $f$  ist stetig.
- ii)  $f^{-1}(O)$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$  für jede in  $\mathbb{R}$  offene Menge  $O$ , d.h. mit anderen Worten, dass Urbilder offener Mengen offen sind.
- iii)  $f^{-1}(A)$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$  für jede in  $\mathbb{R}$  abgeschlossene Menge  $A$ , d.h. mit anderen Worten, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  ii): Es sei  $O \subset \mathbb{R}$  offen. Gilt  $f^{-1}(O) = \emptyset$ , so folgt die Behauptung direkt aus Satz 2.5 a). Es gelte im Folgenden also  $f^{-1}(O) \neq \emptyset$ . Da  $f$  nach Voraussetzung stetig ist, existiert für jedes  $x \in f^{-1}(O)$  eine Umgebung  $U_x \subset \mathbb{R}^n$  von  $x$  mit  $f(U_x) \subset O$ , d.h. es gilt  $x \in U_x \subset f^{-1}(O)$  für jedes  $x \in f^{-1}(O)$ . Daher ist

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} U_x,$$

als Vereinigung offener Mengen nach Satz 2.5 wiederum offen.

ii)  $\Rightarrow$  iii): Es sei  $A \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen, also ist  $A^c$  offen in  $\mathbb{R}$ . Da nach Voraussetzung  $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$  in  $\mathbb{R}^n$  offen ist, folgt, dass  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen ist.

iii)  $\Rightarrow$  i): Es sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $V$  eine offene Umgebung von  $f(x)$  in  $\mathbb{R}$ . Da  $V^c$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  ist, impliziert die Voraussetzung dass  $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$  in  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen ist. Also ist  $U := f^{-1}(V)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und da  $x \in U$  ist  $U$  eine Umgebung von  $x$  mit  $f(U) \subset V$ .

□

Bevor wir nun Beispiele betrachten mit dem Ziel die Aussage des obigen Theorems zu erläutern, bemerken wir, dass nach Theorem 2.17 eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  also genau dann stetig ist, wenn Urbilder offener Mengen offen bzw. wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

**2.18 Beispiele.** a) Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $y \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f^{-1}(y)$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ . Dies ist offensichtlich, da die Menge  $\{y\}$  in  $\mathbb{R}$  abgeschlossen ist.

b) Für eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\} \text{ abgeschlossen und die Menge } \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < r\} \text{ offen.}$$

Dies folgt unmittelbar aus obigem Theorem 2.17, da  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq r\} = f^{-1}((-\infty, r])$  bzw.  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < r\} = f^{-1}((-\infty, r))$  gilt und die Intervalle  $(-\infty, r]$  und  $(-\infty, r)$  abgeschlossen bzw. offen sind.

c) Der abgeschlossene  $n$ -dimensionale Einheitswürfel

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, 1 \leq j \leq n\}$$

ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ . Um dies einzusehen, notieren wir, dass die Projektion auf die  $j$ -te Koordinate gegeben durch  $p_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$  eine stetige Abbildung ist. Da  $Q$  in der Form

$$Q = \bigcap_{j=1}^n \underbrace{(\{x \in \mathbb{R}^n : p_j(x) \leq 1\})}_{\text{abg. nach b)}} \cap \underbrace{(\{x \in \mathbb{R}^n : p_j(x) \geq 0\})}_{\text{abg. nach b)}}$$

dargestellt werden kann, und endliche Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind (vgl. Satz 2.5), folgt die Behauptung aus Theorem 2.17.

d) Man beachte, dass stetige Bilder abgeschlossener (offener) Mengen im Allgemeinen *nicht* abgeschlossen (offen) sind. Wir betrachten hierzu die Menge  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  und die stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ . Dann ist  $A = f^{-1}(\{1\})$  und nach Aussage b) von Theorem 2.17 ist  $A$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}^2$ . Nun ist die Projektion auf die erste Koordinate  $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$  stetig, aber  $p_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht abgeschlossen.

Als weiteres Beispiel betrachten wir das offene Intervall  $O = (-1, 1)$  und die stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ . Dann ist  $f(O) = [0, 1)$  nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

### 3 Stetige Funktionen und Kompaktheit

Der Begriff der Kompaktheit ist von zentraler Bedeutung in der Analysis; so beruhen wichtige Existenzaussagen der Analysis auf Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Mengen. Beispielhaft nennen wir hier den folgenden Satz über die Annahme eines Maximums einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge sowie den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit.

Wir definieren den Begriff der Kompaktheit einer Menge in  $\mathbb{R}^n$  durch die sogenannte Überdeckungseigenschaft und zeigen, dass für Teilmengen  $K$  des  $\mathbb{R}^n$ , die sogenannte Überdeckungskompaktheit mit der später eingeführten Folgenkompaktheit übereinstimmt. Der Satz von Heine-Borel besagt ferner, dass eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Der Grund für die Einführung der Kompaktheit via Überdeckungen besteht darin, dass sich dieses Konzept später in Analysis II problemlos auf normierte oder metrische Räume verallgemeinern lässt, während die Heine-Borelsche Charakterisierung der Kompaktheit sich auf die endlich dimensionale Situation beschränkt.

In diesem Abschnitt sei  $K$  immer eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Wir beginnen mit der Definition der Begriffe Überdeckung und Kompaktheit.

**3.1 Definition.** a) Ist  $I$  eine beliebige Indexmenge, so heißt  $(O_i)_{i \in I}$  eine *offene Überdeckung* von  $K$ , falls die Mengen  $O_i$  für alle  $i \in I$  offen sind und

$$K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$$

gilt.

b) Die Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  heißt *kompakt*, falls *jede* offene Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls  $O_1, \dots, O_N$  existieren mit

$$K \subset \bigcup_{l=1}^N O_{i_l}.$$

**3.2 Beispiele.** a) Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt, denn  $\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ , aber diese offene Überdeckung besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

b) Das Intervall  $(0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist nicht kompakt, denn  $(0, 1] \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\frac{1}{j}, 2)$ , aber diese Überdeckung besitzt wiederum keine endliche Teilüberdeckung.

c) Es sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$ . Dann ist

$$K := \{a_j : j \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

eine kompakte Menge. Zur Begründung betrachten wir eine offene Teilüberdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $K$ . Dann existiert ein  $j \in I$  mit  $a \in O_j$ . Da  $O_j$  eine Umgebung von  $a$  ist,

existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_k \in O_j$  für alle  $k \geq N_0$ . Wählen wir nun Indizes  $i_0, \dots, i_{N_0}$  derart, dass  $a_k \in O_{i_k}$  für alle  $k = 1, \dots, N_0$  gilt, so ergibt sich

$$K \subset \left( \bigcup_{k=0}^{N_0} O_{i_k} \right) \cup O_j.$$

d) Die Aussage von c) ist im Allgemeinen falsch, falls  $a$  aus  $K$  entfernt wird. Betrachte hierzu die Folge  $(1/j)_{j \in \mathbb{N}}$  und setze  $M = \{\frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  sowie  $O_1 = (\frac{1}{2}, 2)$  und  $O_j = (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j-1})$  für alle  $j \geq 2$ . Dann ist  $M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} O_j$  und jedes  $O_j$  enthält genau ein Element von  $M$ , aber die offene Überdeckung  $(O_j)_{j \in \mathbb{N}}$  besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

**3.3 Satz.** *Eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen und beschränkt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $K$  beschränkt ist. Hierzu sei  $x \in \mathbb{R}^n$  beliebig gewählt. Dann ist  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(x)$ , also auch  $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(x)$ , und da  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N B_{k_j}(x).$$

Setzt man  $R := \max\{k_1, \dots, k_N\}$ , so gilt  $K \subset B_R(x)$  und  $K$  ist somit beschränkt.

Wir zeigen weiter, dass  $K$  abgeschlossen ist. Wähle hierzu  $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$  und für  $j \in \mathbb{N}$  setze  $U_j := \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| > \frac{1}{j}\}$ . Dann ist  $U_j$  offen und es gilt

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{x\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j.$$

Da  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung hiervon, d.h. es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $K \subset \bigcup_{k=1}^N U_{j_k}$ . Für  $R := \max\{n_1, \dots, n_N\}$  gilt  $B_{\frac{1}{R}}(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$  und somit ist  $\mathbb{R}^n \setminus K$  offen, was bedeutet, dass  $K$  abgeschlossen ist.  $\square$

**3.4 Lemma.** *Eine abgeschlossene Teilmenge  $A$  einer kompakten Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt.*

*Beweis.* Es sei  $(O_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $A$ . Nach Voraussetzung ist  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen und es gilt

$$K \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{i \in I} O_i \cup \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Da  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $K$ , d.h. es existieren  $i_1, \dots, i_N \in I$  mit

$$K \subset (O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N}) \cup \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Deswegen gilt  $A \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_n}$  und  $A$  ist kompakt. □

**3.5 Theorem.** (Satz von Heine-Borel). *Eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

*Beweis.* Die Richtung „ $\implies$ “ ist genau die Aussage des Satzes 3.3. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, nehmen wir an, dass  $K$  abgeschlossen und beschränkt ist und daher in einem Quader der Form

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_l \leq x_l \leq b_l\}$$

mit  $a_l, b_l \in \mathbb{R}$  und  $a_l \leq b_l$  für  $l = 1, \dots, n$  enthalten ist. Falls wir zeigen können, dass  $Q$  kompakt ist, so folgt die Behauptung aus obigem Lemma 3.4. Dies ist aber genau die Aussage des folgenden Lemmas.

**3.6 Lemma.** *Es sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  definiert wie oben. Dann ist  $Q$  kompakt.*

*Beweis.* Wir betrachten eine offene Überdeckung  $(O_i)_{i \in I}$  von  $Q$  und nehmen an, dass keine offene Teilüberdeckung von  $Q$  existiere. Im Folgenden konstruieren wir eine Folge von abgeschlossenen Teilquadern

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$$

mit der Eigenschaft, dass

i)  $Q_m$  keine endliche Teilüberdeckung besitzt und dass

ii)  $\text{diam}(Q_m) = 2^{-m} \text{diam}(Q)$

gilt. Hierzu setzen wir  $Q_0 = Q$  und nehmen an, dass  $Q_m$  schon konstruiert sei. Dann gilt  $Q_m = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ , wobei  $I_l \subset \mathbb{R}$  für  $l = 1, \dots, n$  abgeschlossene Intervalle sind. Wir halbieren nun  $I_l$ , schreiben  $I_l = I_l^1 \cup I_l^2$  und setzen

$$Q_m^{s_1, \dots, s_n} := I_1^{s_1} \times I_2^{s_2} \times \dots \times I_n^{s_n}, \quad \text{für } s_i = 1, 2.$$

Es gilt daher

$$Q_m = \bigcup_{(s_1, \dots, s_n) \in \{1, 2\}^n} Q_m^{s_1, \dots, s_n}.$$

Da  $Q_m$  keine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt dies auch für mindestens einen der Teilquader  $Q_m^{s_1, \dots, s_n}$ . Wir bezeichnen diesen mit  $Q_{m+1}$ . Dann gilt

$$\text{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(Q_m) = 2^{-m-1} \text{diam}(Q),$$

und deshalb besitzt  $Q_{m+1}$  die obigen Eigenschaften i) und ii). Nach Satz 2.15 existiert genau ein  $a$  mit  $a \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q_m$ . Ferner, da  $(O_i)_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $Q$  ist, ist  $a$  ein Element von  $O_{i_0}$  für ein  $i_0$ , d.h. es gilt  $B_\varepsilon(a) \subset O_{i_0}$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen nun  $m$  so groß, dass  $\text{diam } Q_m < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Da  $a \in Q_m$  ist, gilt

$$Q_m \subset B_\varepsilon(a) \subset O_{i_0}$$

im Widerspruch zur Eigenschaft i)! □

Der Begriff der Kompaktheit und damit zusammenhängend der Satz von Heine-Borel haben viele, sehr wichtige Konsequenzen in der Analysis. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt zunächst mit grundlegenden Eigenschaften von stetigen Bildern kompakter Mengen.

**3.7 Theorem.** (Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt). *Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge, so ist  $f(K) \subset \mathbb{R}$  kompakt.*

*Beweis.* Es sei  $(O_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $f(K)$ . Nach dem Charakterisierungstheorem für stetige Funktionen 2.17 ist  $V_i = f^{-1}(O_i)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  und es gilt  $K \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ . Da  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, besitzt die obige Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung und es gilt  $K \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Daher gilt  $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^N O_i$  und die obige Überdeckung von  $f(K)$  besitzt somit eine endliche Teilüberdeckung. □

Das folgende Korollar folgt direkt aus Theorem 3.7 und Satz 3.3.

**3.8 Korollar.** *Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge. Dann ist  $f(K)$  beschränkt, d.h. es existiert ein  $M > 0$  mit  $|f(x)| \leq M$  für alle  $x \in K$ .*

**3.9 Satz.** (Stetige Funktion nehmen auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an). *Es sei  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $K$  kompakt. Dann nimmt die Funktion  $f$  ihr Maximum und Minimum an, d.h. es existieren  $x_0, x_1 \in K$  mit*

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_1) = \max_{x \in K} f(x).$$

Der Beweis verläuft wie folgt. Nach Theorem 3.7 ist  $f(K)$  kompakt und daher nach Satz 3.3 beschränkt und abgeschlossen. Also ist

$$m := \inf f(K) > -\infty \quad \text{und} \quad M := \sup f(K) < \infty.$$



Es existieren daher Folgen  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}, (z_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset f(K)$  mit  $y_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} m$  und  $z_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} M$ . Da  $f(K)$  abgeschlossen ist, folgt aus Satz 2.14 dass  $m$  und  $M$  in  $f(K)$  liegen. Also existieren  $x_0, x_1 \in K$  mit  $f(x_0) = m$  und  $f(x_1) = M$ . □

Der eben bewiesene Satz 3.9 impliziert ferner, dass eine abgeschlossene und eine kompakte Menge mit leerem Durchschnitt immer einen strikt positiven Abstand haben. Wir definieren hierbei den Abstand zweier Mengen  $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  wie folgt: für  $x \in \mathbb{R}^n$  heißt

$$d(x, M_1) := \inf\{|x - y| : y \in M_1\}$$

der *Abstand* von  $x$  zu  $M_1$  und

$$d(M_1, M_2) := \inf\{|x - y| : x \in M_1, y \in M_2\}$$

heißt der *Abstand* der Mengen  $M_1$  und  $M_2$ .

**3.10 Korollar.** *Für eine abgeschlossene Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  und eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  mit  $A \cap K = \emptyset$  gilt  $d(A, K) > 0$ .*

*Beweis.* Die Funktion  $x \mapsto \text{dist}(x, A)$  ist stetig und  $K$  ist nach Voraussetzung kompakt. Nach Satz 3.9 existiert ein  $x_0 \in K$  mit  $d(x_0, A) = d(K, A)$ . Falls  $d(x_0, A) = 0$  gelten würde, so würde eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset A$  existieren mit  $d(x_0, a_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , d.h. die Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  würde gegen  $x_0$  konvergieren. Da  $A$  abgeschlossen ist, folgt  $x_0 \in A$  und es gilt  $x_0 \in A \cap K$ , im Widerspruch zu  $A \cap K = \emptyset$ . □

**3.11 Theorem.** (Folgenkompaktheit). *Für eine Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- i)  *$K$  ist kompakt (überdeckungskompakt).*
- ii) *Jede Folge in  $K$  besitzt eine Teilfolge, welche gegen ein  $a \in K$  konvergiert. (folgenkompakt).*

*Beweis.* „ $\implies$ “: Wir nehmen an, dass die Behauptung falsch sei. Dann existiert eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $K$ , welche keine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von  $K$  konvergiert. Also existiert für jedes  $x \in K$  eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  mit der Eigenschaft, dass höchstens endlich viele Folgenglieder von  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $U_x$  enthalten sind. Da  $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$  und  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, existieren endlich viele  $x_1, \dots, x_N \in K$  derart, dass  $K$  von  $\{U_{x_k} : k = 1, \dots, N\}$  überdeckt wird. Somit enthält  $K$  nur endlich viele Folgenglieder, im Widerspruch zur Annahme.

„ $\impliedby$ “: Wir notieren zunächst, dass die Menge  $K$  beschränkt ist, denn ansonsten

würde eine Folge  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset K$  existieren mit  $|a_j| \geq j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , welche dann aber keine konvergente Teilfolge besitzen würde.

Nach dem Satz von Heine-Borel bleibt zu zeigen, dass  $K$  abgeschlossen ist. Hierzu sei  $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset K$  eine Folge mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a \in \mathbb{R}^n$ . Nach Voraussetzung besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge  $(a_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{j_l} = a' \in K$ . Die Eindeutigkeit des Grenzwerts impliziert aber, dass  $a = a'$  und somit  $a \in K$  gilt. Nach Satz 2.14 ist  $K$  somit abgeschlossen und der Satz von Heine-Borel impliziert, dass  $K$  kompakt ist.  $\square$

Wir betrachten nun den Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit* einer Funktion  $f$  welche auf einer Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist. Die Stetigkeit einer solchen Funktion  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in einem Punkt  $x_0 \in M$  bedeutet bekanntlich, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) : x \in M, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Hierbei hängt  $\delta$  im allgemeinen von  $x_0$  ab! Falls man  $\delta$  unabhängig von  $x_0$  wählen kann, so nennen wir  $f$  gleichmäßig stetig auf  $M$ . Genauer gesagt gilt die folgende Definition.

**3.12 Definition.** Eine Funktion  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  (unabhängig von  $x$ ) existiert mit

$$x, y \in M, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir verifizieren, dass jede Lipschitzstetige Funktion gleichmäßig ist, hingegen ist die Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$  stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Die Wurzelfunktion  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto \sqrt{x}$  ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitzstetig.

Der folgende Satz besagt, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist.

**3.13 Satz.** (Stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig).  
Ist  $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $K$  eine kompakte Menge, so ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $K$ .

*Beweis.* Die Stetigkeit von  $f$  besagt, dass für  $\varepsilon > 0$  und  $y \in M$  ein Radius  $r_y > 0$  existiert mit

$$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } z \in B_{r_y}(y) \cap K.$$

Da  $K \subseteq \bigcup_{y \in K} B_{\frac{r_y}{2}}(y)$  und da  $K$  nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_{\frac{r_{y_j}}{2}}(y_j).$$

Wählen wir nun  $\delta := \frac{1}{2} \min\{r_{y_1}, \dots, r_{y_N}\}$  und  $x, x' \in K$  mit  $|x - x'| \leq \delta$ , so existiert ein  $j \in \{1, \dots, N\}$  mit  $x \in B_{\frac{r_{y_j}}{2}}(y_j)$  und  $x' \in B_{r_{y_j}}(y_j)$  und

$$|f(x) - f(x')| \leq \underbrace{|f(x) - f(y_j)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(y_j) - f(x')|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

□

Die Fortsetzung einer gegebenen stetigen Funktion  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  zu einer stetigen Funktion auf  $\overline{M}$  ist eng mit dem Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit verbunden. Genauer gesagt, sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$  ein Häufungspunkt von  $M$ . Wir wollen nun der Frage nachgehen unter welchen Bedingungen eine stetige Erweiterung von  $f$  auf  $M \cup \{x_0\}$  existiert?

Zunächst wollen wir aber den Begriff des Grenzwerts einer Funktion präzisieren.

**3.14 Definition.** Eine Funktion  $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  hat im Häufungspunkt  $x_0$  von  $M$  den Grenzwert  $a$ , wenn für jede Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $M \setminus \{x_0\}$  mit  $x_j \rightarrow x_0$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = a.$$

In diesem Fall sagt man auch, dass  $f(x)$  für  $x \rightarrow a$  gegen  $a$  konvergiert und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow a \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0.$$

Gehört  $x_0$  zum Definitionsbereich von  $f$  und ist  $f$  stetig in  $x_0$ , so ist der Funktionswert in  $x_0$  identisch mit dem Grenzwert in  $x_0$ , d.h. es gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Ferner heißt  $F : M \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in M \\ y_0, & x = x_0 \end{cases}$$

eine *stetige Erweiterung* von  $f$  auf  $M \cup \{x_0\}$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$  existiert. Ist speziell  $M \subset \mathbb{R}$ , so heißt

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = y_0$$

*linksseitiger Grenzwert* von  $f$  in  $x_0$ , falls für alle Folgen  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $M \cap (-\infty, x_0)$  mit  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0$  die Folge  $(f(x_j))_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $y_0$  konvergiert. Analog heißt

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = y_0$$

*rechtsseitiger Grenzwert* von  $f$  in  $x_0$ , falls für alle Folgen  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $M \cap (x_0, \infty)$  mit  $x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_0$  die Folge  $(f(x_j))_{j \in \mathbb{N}}$  gegen  $y_0$  konvergiert.

Ist  $M \subset \mathbb{R}$  nicht nach oben beschränkt und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so heißt  $a \in \mathbb{C}$  der Grenzwert von  $f$  in  $\infty$ , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$|f(x) - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } x > N_0$$

gilt. Analog definiert man den Grenzwert in  $-\infty$ .

**3.15 Beispiele.** a) Betrachtet man die Menge  $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) := \frac{x^n - 1}{x - 1}$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n,$$

denn es ist  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ .

b) Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dies folgt aus der Darstellung

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots,$$

denn es gilt

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq \frac{|x|}{2} (1 + |x| + |x^2| + \dots) = \frac{|x|}{2(1 - |x|)} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

für  $|x| < 1$  aufgrund der geometrischen Reihe.

c) Der Limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$$

existiert nicht, da für die Funktion  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) := 1$  für  $x > 0$  und  $f(x) := -1$  für  $x < 0$ , der linksseitige Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$  nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$  übereinstimmt.

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit einer Charakterisierung stetiger Fortsetzbarkeit gegebener stetiger Funktionen durch ihre gleichmäßige Stetigkeit.

**3.16 Satz.** Für eine beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  und eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) Es existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung  $F : \overline{M} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  auf  $\overline{M}$ .
- ii) Die Funktion  $f$  ist gleichmäßig stetig auf  $M$ .

*Beweis.* „ $\implies$ “ : Da  $\overline{M}$  beschränkt und abgeschlossen ist, folgt aus dem Satz von Heine-Borel, dass  $\overline{M}$  kompakt ist. Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 3.13. Für die umgekehrte Richtung „ $\impliedby$ “ verweisen wir auf die Übungen. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir die sogenannte Sägezahnfunktion  $f$  gegeben durch

$$f(x) := |x - [x] - \frac{1}{2}|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{und } g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in I = (0, 1).$$

Dann ist die Funktion  $g$  stetig im Intervall  $I = (0, 1)$ , aber nicht gleichmässig stetig. Letzteres folgt aus

$$g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1/2}\right) = f(n) - f(n+1/2) = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach obigem Satz lässt sich  $g$  daher nicht als stetige Funktion auf das abgeschlossene Intervall  $[0, 1]$  fortsetzen; insbesondere existiert der Grenzwert von  $g(x)$  für  $x \rightarrow 0+$  nicht.

## 4 Die Exponentialfunktion und Verwandte

Im Zentrum dieses Abschnitts steht die Exponentialfunktion, eine der wichtigsten Funktionen der gesamten Mathematik. Mit ihrer Hilfe führen wir zum einen die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus ein und untersuchen zum anderen die uns schon bekannten Logarithmus- und Potenzfunktionen auf weitere Eigenschaften.

Viele der folgenden Definitionen und Argumente gehen direkt auf LEONHARD EULER (1707-1783), einen der bedeutendsten Mathematiker aller Zeiten zurück. Im Jahre 1707 in Basel geboren, immatrikulierte er sich im Alter von 13 Jahren an der Basler Universität, wurde dort Schüler von Johann Bernoulli, um dann 1727 an die Akademie von St. Petersburg und später, genauer 1733, auf die dortige Mathematikprofessur berufen zu werden. Zu jener Zeit bildeten die Akademien das Zentrum der wissenschaftlichen Forschung und Euler verbrachte sein gesamtes Leben an den Akademien in St. Petersburg und Berlin (1741-1766). Den größten Einfluss übte Euler in der Mathematik durch seine Lehrbücher aus. Seine „*Introductio in analysin infinitorum*“ ebnete den Weg für die Analysis zu einem, neben der Geometrie und der Algebra gleichberechtigten, Zweig der Mathematik. Unsere heutige mathematische Bezeichnungsweise geht in wesentlichen Teilen auf ihn zurück.

Bevor wir - dem Eulerschen Wege folgend - die Sinus und Cosinusreihe als Potenzreihe definieren, erinnern wir zunächst noch einmal an die uns aus Kapitel II wohlbekannte Exponentialreihe

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots, \quad z \in \mathbb{C},$$

deren Konvergenzradius unendlich ist. Die im Folgenden genauer untersuchten Sinus- und Cosinusreihen weisen eine enge Verwandtschaft mit der Exponentialreihe auf. Es ist dabei wesentlich im Komplexen zu arbeiten; erst hier wird die innere Beziehung all dieser Funktionen deutlich. Rückwirkend werden wir durch die trigonometrischen Funktionen auch neue Erkenntnisse über die Exponentialfunktion gewinnen, zum Beispiel, dass sie eine komplexe Periode besitzt.

**4.1 Definition.** Die *Sinusreihe*  $\sin z$  bzw. die *Cosinusreihe*  $\cos z$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \quad z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Die so definierten Sinus- und Cosinusreihen besitzen die folgenden elementaren Eigenschaften.

- 4.2 Satz.** a) Der Konvergenzradius der Sinus- und Cosinusreihe ist unendlich.  
b) Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- c) Die Funktionen  $z \mapsto \sin z$  und  $z \mapsto \cos z$  sind stetige Funktionen auf  $\mathbb{C}$ .

Die Aussage über den Konvergenzradius folgt aus der Cauchy-Hadamardschen Formel II.5.2. Ferner ist die Eulersche Formel eine unmittelbare Konsequenz der Darstellung

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Stetigkeit der Funktionen  $z \mapsto \sin z$  und  $z \mapsto \cos z$  folgt aus Satz 1.7.

Weitere Eigenschaften der Cosinus- bzw. Sinusreihe lassen sich ebenso direkt aus der Definition herleiten.

- 4.3 Korollar.** a) Die Cosinusfunktion  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \cos z$  ist eine gerade, die Sinusfunktion  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \sin z$  eine ungerade Funktion, d.h. es gilt

$$\cos z = \cos(-z) \text{ und } \sin z = -\sin(-z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

- b) Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ und } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- c) Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$  und  $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ .  
d) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|e^{ix}| = 1$ .

Wie die Exponentialfunktion besitzen auch die Sinus- und Cosinusfunktionen gewisse Additionstheoreme.

- 4.4 Satz.** (Additionstheoreme für Sinus und Cosinus). Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \cos(z \pm w) &= \cos z \cos w \mp \sin z \sin w, \\ \sin(z \pm w) &= \sin z \cos w \pm \cos z \sin w, \\ \sin z - \sin w &= 2 \cos\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right), \\ \cos z - \cos w &= -2 \sin\left(\frac{z+w}{2}\right) \sin\left(\frac{z-w}{2}\right). \end{aligned}$$

*Beweis.* Für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt nach Korollar 4.3 b)

$$\begin{aligned}\cos z \cos w - \sin z \sin w &= \frac{1}{4}[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})] \\ &= \frac{1}{4}[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] \\ &= \frac{1}{2}[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] = \cos(z+w).\end{aligned}$$

Der Beweis der anderen Aussagen verläuft ähnlich und wird dem Leser überlassen.  $\square$

Betrachtet man das erste der obigen Additionstheoreme für  $z = w$ , so folgt

$$\cos^2 z + \sin^2 z \stackrel{4.4}{=} \cos(z-z) = \cos 0 = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir halten diese wichtige Beziehung explizit im folgenden Korollar fest.

**4.5 Korollar.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Wir untersuchen im Folgenden die  $e$ -Funktion speziell für reelle Argumente. Den Beweis der folgenden Eigenschaften überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

**4.6 Satz.** Es gelten die folgenden Aussagen:

- a)  $e^x < 1$  falls  $x < 0$  und  $e^x > 1$  falls  $x > 0$ .
- b) Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist streng monoton wachsend.
- c) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty,$$

d.h. mit anderen Worten, dass die  $\exp$ -Funktion für  $x \rightarrow \infty$  schneller wächst als jede Potenz  $x^\alpha$ .

- d) Für jedes  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0,$$

d.h. mit anderen Worten, dass die  $\exp$ -Funktion für  $x \rightarrow -\infty$  schneller fällt als jede Potenz  $x^\alpha$ .



Da die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  stetig und streng monoton wachsend ist, existiert nach Abschnitt II.1 die Umkehrfunktion

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion. Diese wird wie schon in Abschnitt II als *Logarithmusfunktion* bezeichnet. Es gilt insbesondere

$$\log 1 = 0 \quad \text{und} \quad \log e = 1.$$

Ferner besitzt die Logarithmusfunktion die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \log(xy) &= \log x + \log y, & x, y \in (0, \infty) \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log x - \log y, & x, y \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Dies folgt direkt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, denn setzt man  $a := \log x$  und  $b := \log y$ , so gilt  $x = e^a$  und  $y = e^b$  und es folgt  $xy = e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ ; also  $\log(xy) = \log x + \log y$ .

Die Exponentialfunktion erlaubt es auch die *allgemeine Potenz*  $a^z$  für  $a > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$  in Einklang mit den vorherigen Definitionen der Potenz, vgl. Beispiel 1.14 c), zu definieren. Setzt man

$$a^z := e^{z \log a}, \quad z \in \mathbb{C}, a > 0,$$

so gelten für  $z, w \in \mathbb{C}$  und  $a > 0$  die folgenden Rechenregeln

$$\begin{aligned} a^z a^w &= a^{z+w}, \\ a^w b^w &= (ab)^w, \\ \log(a^z) &= z \log a, \\ (a^z)^w &= a^{zw}. \end{aligned}$$

Diese sind leicht einzusehen, denn es gilt  $a^z a^w = e^{z \log a} e^{w \log a} = e^{(z+w) \log a} = a^{(z+w)}$ . Der Beweis der anderen Rechenregeln verläuft analog.

Wir verifizieren ebenfalls, dass für  $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$$

gilt. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass  $\log$  für  $x \rightarrow \infty$  langsamer wächst als jede Potenz  $x^\alpha$ .

Wir untersuchen im Folgenden die Funktionen Sinus und Cosinus speziell für reelle Argumente und interessieren uns zunächst für ihre Nullstellen.

**4.7 Lemma.** Für  $x \in (0, 2]$  gilt:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{und} \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Insbesondere ist  $\sin x > 0$  für  $x \in (0, 2]$ .

*Beweis.* Für  $x \in (0, 2]$  gilt

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \underbrace{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}}_{>0} + \dots > x - \frac{x^3}{3!},$$

denn es ist  $\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{x^n[(n+1)(n+2) - x^2]}{(n+2)!} > 0$ . Andererseits gilt

$$\sin x = x - \underbrace{\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right)}_{>0} - \underbrace{\left(\frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!}\right)}_{>0} + \dots < x,$$

und somit folgt die Behauptung für die Sinusfunktion. Die Abschätzung für  $\cos$  verläuft analog. □

Insbesondere gilt

$$\sin x > 0 \text{ für } x \in (0, 2],$$

und  $\cos$  ist eine streng monoton fallende Funktion auf dem Intervall  $[0, 2]$ ; denn für  $x > y$  folgt

$$\cos x - \cos y \stackrel{4.4}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0, \quad x, y \in [0, 2].$$

Diese Eigenschaften implizieren, dass die Cosinusfunktion im Intervall  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle besitzt, wie wir im folgenden Satz sehen werden.

**4.8. Satz und Definition der Zahl  $\pi$ .** Die Cosinus-Funktion hat im Intervall  $[0, 2]$  genau eine Nullstelle  $x_0$ . Wir setzen

$$\pi := 2x_0.$$

Die Bezeichnung  $\pi$  wurde durch das oben schon erwähnte Eulersche Lehrbuch populär und könnte aus dem griechischen Wort  $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$  für Umfang herrühren. Versucht man die Zahl  $\pi$  heute numerisch zu berechnen, so erhält man

$$\pi = 3, 14159 26535 89793 23846 \dots$$

*Beweis.* Es gilt  $\cos 0 = 1$  und das obige Lemma 4.7 impliziert, dass  $\cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = -\frac{1}{3} < 0$  gilt. Da  $\cos$  stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass  $\cos$  mindestens eine Nullstelle  $x_0$  in  $[0, 2]$  besitzt. Die Eindeutigkeit der Nullstelle folgt aus der strengen Monotonie von  $\cos$  auf  $[0, 2]$ . □

**4.9 Bemerkung.** Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, falls sie Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Zum Beispiel ist jede rationale Zahl  $p/q$  als Nullstelle des Polynoms  $x \mapsto qx - p$  algebraisch. Reelle Zahlen, welche nicht algebraisch sind, heißen *transzendente Zahlen*; letztere sind insbesondere irrational. H. J. Lambert bewies schon 1761, dass  $\pi$  irrational ist. Den Nachweis, dass  $\pi$  sogar transzendent ist, erbrachte F. Lindemann im Jahre 1882. Dieser Satz entschied auch das über zweitausend Jahre alte und bis heute berühmte *Problem der Quadratur des Kreises* und zwar negativ: es ist unmöglich, allein mit Zirkel und Lineal zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren.

Die obige Definition der Zahl  $\pi$  impliziert insbesondere, dass

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

gilt. Letztere Gleichheit gilt, da aus  $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$  zunächst  $\sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$  folgt, und die Positivität des Sinus in  $(0, 2]$  schließlich  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  impliziert.

Kombiniert man diese Formeln mit der Eulerschen Formel aus Satz 4.2 b), so erhalten wir  $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$  und allgemeiner gilt die folgende Tabelle der Funktionswerte von  $\cos x$ ,  $\sin x$  und  $e^{ix}$ :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\cos x$	1	0	-1	0
$\sin x$	0	1	0	-1
$e^{ix}$	1	$i$	-1	$-i$

Kombiniert man die obigen Funktionswerte mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, so erhalten wir die wichtige Eigenschaft der Periodizität der Exponentialfunktion.

**4.10 Satz.** Für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$e^{z+i\frac{2}{n}\pi} = e^z i^n, \quad \text{und insbesondere} \quad e^{z+2in\pi} = e^z.$$

Dies bedeutet, dass die Exponentialfunktion die rein imaginäre Periode  $2\pi i$  besitzt.

Im folgenden Korollar fassen wir weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zusammen.

**4.11 Korollar.** a) Für  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$i) \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$

$$ii) \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$

insbesondere sind die Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  periodische Funktionen mit der reellen Periode  $2\pi$ .

b) Es gilt

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z},$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ni\pi \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}.$$

Wir beschließen unsere Diskussion der trigonometrischen Funktionen vorerst mit der Einführung der Tangens- und Cotangensfunktion. Genauer gesagt, definieren wir die *Tangensfunktion*  $\tan$  und die *Cotangensfunktion*  $\cot$  als

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \frac{\sin z}{\cos z} && \text{und} \\ \cot : \mathbb{C} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{C}, & z &\mapsto \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts wenden wir uns den Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sowie den hyperbolischen Funktionen zu. Wir beginnen mit den folgenden Eigenschaften von  $\sin$ ,  $\cos$  und  $\tan$ .

**4.12 Lemma.** a) Die Funktion  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  ist stetig, surjektiv und streng monoton fallend.

b) Die Funktion  $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  ist stetig, surjektiv und streng monoton steigend.

c) Die Funktion  $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, surjektiv und streng monoton steigend.

Das obige Lemma impliziert daher, dass die Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \arccos : & [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ \arcsin : & [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arctan : & \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

von  $\sin, \cos$  und  $\tan$  auf den jeweiligen Intervallen existieren. Diese heißen *Arcus-Funktionen* und sie sind nach Satz 1.13 stetig.

Unser jetziger Kenntnisstand erlaubt es nun auch, die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen zu behandeln. Genauer gesagt gilt der folgende Satz.

**4.13 Satz.** (Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen). *Jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  besitzt eine Darstellung der Form*

$$z = re^{i\varphi},$$

wobei  $r = |z|$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  bis auf die Addition eines ganzen Vielfachen von  $2\pi$  bestimmt ist.

In der obigen Darstellung heißt  $r$  der *Betrag* und  $\varphi$  das *Argument* der komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existieren  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $\frac{z}{|z|} = x + iy$ . Es gilt dann  $x^2 + y^2 = 1$  und somit  $x, y \in [-1, 1]$ . Daher ist

$$\varphi := \begin{cases} \arccos x, & y \geq 0, \\ -\arccos x, & y < 0, \end{cases}$$

wohldefiniert und  $\varphi \in [0, \pi]$  falls  $y \geq 0$ . Nach Lemma 4.7 ist  $\sin \varphi \geq 0$  für alle  $\varphi \in [0, \pi]$  und da  $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$  gilt (vgl. 4.11 b)), folgt  $\sin \varphi \geq 0$  für alle  $\varphi \in [0, \pi]$ . Weiter, da  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = y^2$  gilt, folgt  $\sin \varphi = y$ . Wir erhalten also

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = x + iy = \frac{z}{|z|},$$

und somit  $z = re^{i\varphi}$  für  $r = |z|$ . Der Fall  $y < 0$  verläuft analog. □

**4.14 Bemerkungen.** a) Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung lässt sich das Produkt komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch gut veranschaulichen. Für  $z = |z|e^{i\varphi}$  und  $w = |w|e^{i\psi}$  gilt

$$z \cdot w = |zw|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

b) Ferner existieren zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  und zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  genau  $n$  verschiedene Zahlen  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  mit  $z_k^n = z$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Diese Zahlen heißen  $n$ -te Wurzeln von  $z$ . Insbesondere existieren zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  genau  $n$  verschiedene Einheitswurzeln  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , d.h. komplexe Zahlen  $\xi_k$  mit  $\xi_k^n = 1$  für alle  $k = 1, \dots, n$ . Die  $n$ -ten Wurzeln einer komplexen Zahl  $z = re^{i\varphi}$  sind explizit gegeben durch

$$z_k := \sqrt[n]{r}\xi_k \quad \text{mit} \quad \xi_k = e^{i\left(\frac{\varphi+2i\pi k}{n}\right)} \quad \text{für alle} \quad k = 1, \dots, n.$$

Bei vielen Fragestellungen taucht die Exponentialfunktion in den Kombinationen  $1/2(e^z + e^{-z})$  und  $1/2(e^z - e^{-z})$  auf. Hierauf basierend definieren wir die hyperbolischen Funktionen wie folgt:

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) && \text{Cosinus hyperbolicus,} \\ \sinh z &:= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) && \text{Sinus hyperbolicus,} \\ \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} && \text{Tangens hyperbolicus,} \\ \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} && \text{Cotangens hyperbolicus.} \end{aligned}$$

Die Beziehungen

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = -i \sin iz, \quad z \in \mathbb{C}$$

und

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}$$

sind ebenso schnell einzusehen, wie die Potenzreihendarstellung

$$\cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}, \quad \text{bzw.} \quad \sinh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

# IV Differentialrechnung einer Variablen

## 1 Differenzierbare Funktionen

Die auf Leibniz und Newton zurückgehende Differential- und Integralrechnung bildet den inhaltlichen Kern der Grundvorlesungen über Analysis. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Differentialrechnung von Funktionen einer reellen Variablen, lassen aber weiterhin komplexwertige Funktionen zu.

Wir beginnen mit dem Problem eine gegebene Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  durch eine affine Funktion im Punkt  $x_0 \in D$  zu approximieren. Gilt speziell  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so kann man diese Fragestellung geometrisch so interpretieren, dass wir die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  bestimmen wollen.

Die grundlegende Idee zur Lösung obigen Problems besteht darin, die Tangente durch die Gerade durch die Punkte  $(x_0, f(x_0))$  und  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  für kleines  $h$  zu approximieren. Die Steigung dieser Geraden ist dann gegeben durch  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ . Dies motiviert die folgende Definition.

**1.1 Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *differenzierbar in  $x_0 \in D$* , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Ableitung von  $f$  in  $x_0$*  und wird mit  $f'(x_0)$  oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet. Ist  $f$  in jedem  $x \in M$  differenzierbar, so heißt  $f$  *differenzierbar* und die Abbildung  $f' : M \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto f'(x)$  heißt die *Ableitung* von  $f$ .

**1.2 Beispiele.** a) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = nx^{n-1}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x_0^{n-1} + xx_0^{n-2} + x^2x_0^{n-3} + \dots + x^{n-1} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

gilt.

b) Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = e^{\alpha x}$  ist für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ , denn es ist

$$\frac{e^{\alpha(x_0+h)} - e^{\alpha x_0}}{h} = e^{\alpha x_0} \left( \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \alpha e^{\alpha x_0},$$

analog zu Beispiel 3.15 b).

Im folgenden Satz wollen wir den Begriff der Differenzierbarkeit äquivalent umformen. Dabei setzen wir immer voraus, dass  $x_0 \in D$  ein Häufungspunkt von  $D$  ist.

**1.3 Satz.** Für eine Funktion  $f : M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  und  $x_0 \in M$  sind folgende Aussagen äquivalent.

i) Die Funktion  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar.

ii) Es existiert eine in  $x_0$  stetige Funktion  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{K}$  mit

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x), \quad x \in M.$$

In diesem Fall gilt  $f'(x_0) = \varphi(x_0)$ .

iii) Es existiert eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{h} = 0.$$

In diesem Fall gilt  $f'(x_0)h = Lh$  für alle  $h \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* i)  $\implies$  ii): Nach Voraussetzung besitzt die Funktion  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  für  $x \in M \setminus \{x_0\}$  eine in  $x_0$  stetige Fortsetzung  $\varphi$ . Im Punkt  $x_0$  gilt dann  $\varphi(x_0) = f'(x_0)$ .

ii)  $\implies$  iii): Die durch  $Lh := \varphi(x_0)h = f'(x_0)h$  definierte lineare Abbildung erfüllt die in Aussage iii) geforderten Eigenschaften.

iii)  $\implies$  i): Es sei  $L$  eine lineare Abbildung, welche die Aussage iii) erfüllt. Gilt  $Lh = \alpha h$  für ein  $\alpha \in \mathbb{C}$ , so folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h}{h} = 0;$$

also ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt  $f'(x_0) = \alpha$ .

□



Die Aussage iii) des obigen Satzes besagt, dass für eine differenzierbare Funktion  $f$  der Zuwachs  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  von  $f$  durch  $Lh$  derart gut approximiert wird, dass die Differenz  $f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh$  für  $h \rightarrow 0$  schneller gegen 0 konvergiert als  $h$  selbst. Diese Formulierung zielt darauf ab Funktionen lokal durch lineare Funktionen zu approximieren und wird später mit Hilfe des Satzes von Taylor noch ausgebaut. Sie ist dann auch der Ausgangspunkt für die Übertragung des Begriffs der Differenzierbarkeit auf Funktionen mehrerer Variablen.

Satz 1.3 impliziert zunächst unmittelbar, dass eine in  $x_0$  differenzierbare Funktion dort auch stetig ist.

**1.4 Korollar.** *Eine in  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}$  differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$  ist in  $x_0$  auch stetig.*

Wir bemerken, dass die Umkehrung von Korollar 1.4 im allgemeinen *nicht* gilt. Betrachte hierzu zum Beispiel die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  im Punkt 0. Wir bemerken ferner, dass stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  existieren, welche in *keinem* Punkt differenzierbar sind.

**1.5 Satz.** (Rechenregeln für differenzierbare Funktionen) *Es seien  $f, g : M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0 \in M$  differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Die Funktion  $\alpha f + \beta g$  ist differenzierbar in  $x_0$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

*Die Ableitung ist also insbesondere eine lineare Abbildung.*

b) (Produktregel). *Das Produkt  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar und es gilt*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

c) (Quotientenregel). *Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so existiert ein  $\delta > 0$  mit der Eigenschaft, dass  $\frac{f}{g} : M \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0$  differenzierbar ist und dass*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*gilt.*

*Beweis.* Die Aussage a) folgt direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte.

Um die Aussage b) zu beweisen, sei  $h \neq 0$  und  $x_0 + h \in M$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}g(x_0 + h) + \\ &\quad \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}f(x_0) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise beweisen wir die Aussage c). Genauer gesagt gilt

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h} &= \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \left[ \frac{[f(x_0+h) - f(x_0)]g(x_0)}{h} - \frac{[g(x_0+h) - g(x_0)]f(x_0)}{h} \right] \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

□

**1.6 Beispiele.** a) Ein Polynom  $p$  der Form  $p(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x$  ist differenzierbar mit der Ableitung  $p'(x) = 15x^2 + 14x + 3$ . Dies folgt aus Beispiel 1.2 a) und Satz 1.5 a).

b) Die Sinus- sowie die Cosinusfunktion sind differenzierbar für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und es gilt

$$\sin'(x) = \cos x, \quad \cos'(x) = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

denn es gilt  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$  und Beispiel 1.2 b) und Satz 1.5 a) implizieren

$$(\sin x)' = \frac{1}{2i}(ie^{ix} + ie^{-ix}) = \cos x.$$

c) Die Ableitung der Tangensfunktion ist nach der Quotienten-Regel gegeben durch

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \stackrel{\text{III.4.3}}{=} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto x^{-n}$ . Dann gilt  $f'(x) = -nx^{-n-1}$ , denn es ist  $f = \frac{1}{h}$  für die differenzierbare Funktion  $h(x) = x^n$  und nach der Quotientenregel gilt  $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**1.7 Satz. (Kettenregel)** Es seien  $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen mit  $g(D_g) \subset D_f$ . Ist  $g$  in  $x_0 \in D_g$  und  $f$  in  $g(x_0) \in D_f$  differenzierbar, so ist  $f \circ g : D_g \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

*Beweis.* Nach Satz 1.3 existieren in  $x_0$  bzw. in  $g(x_0)$  stetige Funktionen  $\varphi_f$  und  $\varphi_g$  mit

$$\begin{aligned} f(y) - f(y_0) &= (y - y_0)\varphi_f(y), \quad y \in D_f \\ g(x) - g(x_0) &= (x - x_0)\varphi_g(x), \quad x \in D_g. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = (g(x) - g(x_0))\varphi_f(g(x)) = (x - x_0) \underbrace{\varphi_g(x)\varphi_f(g(x))}_{=: \varphi(x)}$$

mit einer in  $x_0$  stetigen Funktion  $\varphi := \varphi_g \cdot (\varphi_f \circ g)$ . Der Satz 1.3 impliziert weiter, dass  $f \circ g$  in  $x_0$  differenzierbar ist, und dass

$$(f \circ g)'(x_0) = \varphi(x_0) = \varphi_g(x_0)\varphi_f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

gilt.

□

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir noch die Ableitung der Umkehrfunktion einer gegebenen differenzierbaren Funktion.

**1.8 Satz.** (Ableitung der Umkehrfunktion). *Es sei  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $g$  die Umkehrfunktion einer stetigen und streng monotonen Funktion  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist  $f$  in  $x_0 \in J$  differenzierbar und ist  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist  $g : f(J) \rightarrow \mathbb{R}$  in  $y_0 := f(x_0)$  differenzierbar und es gilt*

$$g'(y_0) = g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung und Satz 1.3 existiert eine in  $x_0$  stetige Funktion  $\varphi$  mit  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$  für alle  $x \in J$ . Wegen der strengen Monotonie von  $f$  und da  $f'(x_0) \neq 0$  folgt  $\varphi(x) \neq 0$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$ . Für  $x = g(y)$  in dieser Umgebung gilt dann

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) = (g(y) - g(y_0))\varphi(g(y)), \quad y \in f(J).$$

Daher ist  $g(y) - g(y_0) = (y - y_0)\frac{1}{\varphi(g(y))}$ , mit einer nach Kapitel III.1 in  $x_0$  stetigen Funktion  $\varphi \circ g$ . Satz 1.3 impliziert wiederum, dass  $g$  in  $y_0$  differenzierbar ist, und dass gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

□

**1.9 Beispiel.** Die Funktion  $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  ist nach Beispiel 1.6 c) differenzierbar und es gilt  $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$  für alle  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Also ist auch  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

## 2 Der Mittelwertsatz und Anwendungen

Wir haben in Abschnitt III.3 gesehen, dass eine reelle, stetige Funktion  $f$  auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt. Ist die Funktion  $f$  zusätzlich differenzierbar, so liefert die Ableitung eine zusätzliche Information zur Lage der Extremalstellen. Genauer gilt das unten stehende notwendige Kriterium für Extremalwerte; als Anwendung des Mittelwertsatzes stellen wir dann auch ein hierfür hinreichendes Kriterium auf.

**2.1 Definition.** Ist  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so heißt  $x_0 \in D$  *lokales Maximum (Minimum)* von  $f$ , falls ein  $\delta > 0$  existiert mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)), \quad \text{für alle } x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Lokale Maxima oder Minima heissen auch *lokale Extrema* einer gegebenen Funktion  $f$ ; im Folgenden bestimmen wir Kriterien welche es erlauben eine gegebene Funktion nach lokalen Extremwerten zu untersuchen. Wir beginnen zunächst mit einem notwendigem Kriterium für Extremwerte.

**2.2 Satz.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche in  $x_0 \in (a, b)$  ein lokales Extremum besitzt. Ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Es sei  $x_0$  ein lokales Minimum von  $f$ . Dann existiert  $\delta > 0$  mit

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Daher gilt einerseits  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$  und andererseits  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  und somit  $f'(x_0) = 0$ . Der Beweis für ein lokales Maximum verläuft analog. □

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Umkehrung obigen Satzes im Allgemeinen nicht gilt und dass eine auf einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte Funktion  $f$  ein Extremum in  $a$  oder  $b$  annehmen kann, auch wenn  $f'(a) \neq 0$  oder  $f'(b) \neq 0$ .

Der folgende Satz von Rolle ist eine einfache Konsequenz des obigen Satzes.

**2.3 Korollar.** (Satz von Rolle). Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion welche in  $(a, b)$  differenzierbar ist. Gilt  $f(a) = f(b)$ , so existiert  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .

*Beweis.* Ist  $f$  eine konstante Funktion, so gilt  $f' = 0$  und somit die Aussage. Wir nehmen also an, dass  $f$  eine nichtkonstante Funktion sei. Nach Satz III.3.9 nimmt  $f$

auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  sein globales Maximum  $\max f$  bzw. Minimum  $\min f$  an, wobei  $\max f \neq f(a) = f(b)$  oder  $\min f \neq f(a) = f(b)$  gilt. Es existiert also ein  $\xi \in (a, b)$  welches Extremum von  $f$  ist. Nach obigem Satz 2.2 gilt somit  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$

Der folgende Mittelwertsatz ist das zentrale Theorem dieses Abschnitts. Er hat weitreichende Konsequenzen für die Analysis von Funktionen einer reellen Variablen.

**2.4 Theorem.** (Mittelwertsatz). *Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Fkntion, welche in  $(a, b)$  differenzierbar ist, so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

*Beweis.* Wir definieren eine Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist  $F$  stetig auf  $[a, b]$ , differenzierbar in  $(a, b)$  und es gilt  $F(a) = f(a) = F(b)$ . Nach dem Satz von Rolle 2.3 existiert daher ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$F'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass der Mittelwertsatz für differenzierbare Funktionen  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  nicht richtig ist. Ein Gegenbeispiel hierfür ist die Funktion  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(x) = e^{ix}$ . Es gilt dann  $f(0) = 1 = f(2\pi)$ , aber  $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$  für alle  $x \in [0, 2\pi]$ .

Der Mittelwertsatz hat viele wichtige Konsequenzen: Einige hiervon sind im folgenden Korollar zusammengefasst.

**2.5 Korollar.** *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, welche in  $(a, b)$  differenzierbar ist. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

a)  $f$  ist konstant  $\Leftrightarrow f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

b)

$f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$   $\Leftrightarrow f$  ist monoton wachsend in  $(a, b)$ .

$f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b)$   $\Leftrightarrow f$  ist monoton fallend in  $(a, b)$ .

$f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$   $\Rightarrow f$  ist streng monoton wachsend in  $(a, b)$ .

$f'(x) < 0$  für alle  $x \in (a, b)$   $\Rightarrow f$  ist streng monoton fallend in  $(a, b)$ .

c) Ist  $f'(x_0) = 0$  für ein  $x_0 \in (a, b)$ , so ist  $x_0$  ein

i) lokales Minimum, wenn  $f' \leq 0$  in  $(a, x_0)$  und  $f' \geq 0$  in  $(x_0, b)$ ;

ii) lokales Maximum, wenn  $f' \geq 0$  in  $(a, x_0)$  und  $f' \leq 0$  in  $(x_0, b)$ .

d) Ist  $|f'(x)| \leq L$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{für alle } x, y \in [a, b],$$

d.h. mit anderen Worten, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante  $L$ .

e) Die Funktion  $f'$  besitzt die Zwischenwerteigenschaft, obwohl  $f'$  im allgemeinen nicht stetig ist. Genauer sei  $f'(a) \neq f'(b)$  und  $\min\{f'(a), f'(b)\} < \alpha < \max\{f'(a), f'(b)\}$ , so existiert  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = \alpha$ .

*Beweis.* a) Ist  $f$  konstant, so ist klarerweise  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Umgekehrt, sei  $x \in (a, b]$ . Nach dem Mittelwertsatz und der Voraussetzung existiert  $\xi \in (a, x)$  mit  $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0$ . Also ist  $f(x) = f(a)$ .

b) Die Definition der Differenzierbarkeit impliziert unmittelbar, dass  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$  ist, falls  $f$  monoton steigend ist. Umgekehrt sei  $a \leq x < y \leq b$ . Wiederum existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi \in (x, y)$  mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(y - x)}_{> 0} \geq 0,$$

falls  $f' \geq 0$  gilt.

Die Aussagen c) d) und e) überlassen wir als Übungsaufgaben. □

Eine weitere Folgerung aus dem Mittelwertsatz ist die folgende Charakterisierung der Exponentialfunktion auf  $\mathbb{R}$ .

**2.6 Korollar.** Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist die einzige differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f' = f$  und  $f(0) = 1$ .

Zum Beweis betrachten wir die Funktion  $g(x) := f(x)e^{-x}$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $g'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und somit ist  $g$  eine Konstante mit dem Wert  $g(0) = 1$ .

**2.7 Satz.** (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen, welche in  $(a, b)$  differenzierbar sind und es gelte  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

Dann ist  $g(a) \neq g(b)$  und es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Beweis.* Zunächst gilt  $g(a) \neq g(b)$ , denn ansonsten würde nach dem Satz von Rolle 2.3 ein  $x \in (a, b)$  existieren mit  $g'(x) = 0$ , im Widerspruch zur Voraussetzung. Um die eigentliche Aussage des Satzes zu beweisen, definieren wir  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Dann ist  $F(a) = f(a) = F(b)$  und nach dem Satz von Rolle 2.3 existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi).$$

□

Mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes beweisen wir auch die l'Hospitalischen Regeln. Sie gestatten es, Grenzwerte der Form  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  zu bestimmen, wenn sowohl  $f(x)$  als auch  $g(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  gegen 0 oder gegen  $\infty$  konvergieren.

**2.8 Korollar.** (Regeln von l'Hospital). *Es seien  $-\infty < a < b < \infty$  und  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zwei differenzierbare Funktionen mit  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Falls*

*a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  oder*

*b)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ,*

*gilt und  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert, so existiert auch  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  und es gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

*Das entsprechende Resultat gilt auch für  $x \rightarrow b$ ,  $x \rightarrow \infty$  oder  $x \rightarrow -\infty$ .*

*Beweis.* Wir beweisen zunächst die Aussage für den Fall a) und fassen  $f$  und  $g$  als stetige Funktionen in  $a$  auf, indem wir  $f(a) = g(a) = 0$  setzen. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert zu jedem  $x \in (a, b)$  ein  $\xi \in (a, x)$  mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Gilt  $x \rightarrow a$ , so folgt  $\xi \rightarrow a$  und somit die Behauptung.

Im Fall b) setze  $q := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $c \in (a, b)$  mit

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - q \right| \leq \varepsilon, \quad \text{für alle } x \in (a, c).$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann für beliebige  $x, y \in (a, c)$  mit  $x \neq y$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - q \right| \leq \varepsilon.$$

Da nach Voraussetzung  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , existiert ein  $c' \in (a, c)$  mit

$$\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon \text{ und } \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in (a, c').$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - q \right| &= \left| \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \left(\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - q\right) + \frac{f(y)}{g(x)} - q \frac{g(y)}{g(x)} \right| \\ &\leq \varepsilon(2 + |q| + \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle  $x \in (a, c')$ , d.h. es gilt  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = q = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .  
Die verbleibenden Fälle beweist man analog. □

Die l'Hospital'schen Regeln werden oft mit Vorteil verwendet um Grenzwerte zu bestimmen.

**2.9 Beispiele.** Es gelten die folgenden Aussagen:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} \stackrel{2.8}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \stackrel{2.8}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{2.8}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{2.8}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = 0.$$

Wir betrachten nun Ableitungen höherer Ordnung. Genauer sei  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  eine differenzierbare Funktion. Ist  $f'$  auch differenzierbar, so heißt  $f$  *zweimal* differenzierbar und man nennt  $f'' := (f')'$  die *zweite Ableitung* von  $f$ . Allgemeiner definiert man die *n-te Ableitung*  $f^{(n)}$  rekursiv als Ableitung von  $f^{(n-1)}$ . Für  $f^{(n)}$  schreiben wir auch  $\frac{d^n f}{dx^n}$  oder  $D^n f$ .

**2.10 Definition.** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *n-mal stetig differenzierbar*, falls  $f$  *n-mal* differenzierbar ist und die *n-te* Ableitung  $f^{(n)}$  noch stetig ist.

Die zweiten Ableitungen einer Funktion kann man auch geometrisch interpretieren; hierzu führen wir zunächst den Begriff einer konvexen Funktion ein.

**2.11 Definition.** Ist  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so heißt  $f$  *konvex*, falls für alle  $x_1, x_2 \in J$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

gilt.



Den Zusammenhang zwischen konvexen Funktionen  $f$  und Eigenschaften von  $f'$  liefert der folgende Satz.

**2.12 Satz.** *Es sei  $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Dann ist  $f$  genau dann konvex, wenn  $f'$  monoton steigend ist.*

*Beweis.*  $\implies$ : Es seien  $x, x_1, x_2 \in J$  mit  $x_1 < x < x_2$ . Wir wählen  $\lambda \in (0, 1)$  so, dass  $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$  gilt. Da  $f$  nach Voraussetzung konvex ist, gilt  $f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ . Daher ist

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &\leq \lambda(f(x_2) - f(x_1)) \\ f(x_2) - f(x) &\geq (1 - \lambda)[f(x_2) - f(x_1)] \end{aligned}$$

und da  $x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$  und  $x_2 - x = (1 - \lambda)(x_2 - x_1) > 0$  gilt, ergibt sich

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x_1 < x < x_2.$$

Somit gilt

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_2-0} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2).$$

und  $f$  ist daher monoton wachsend.

$\impliedby$ : Der Beweis verläuft ähnlich wie oben und wird dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. □

**2.13 Korollar.** *Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal differenzierbare Funktion, so gilt*

$$f \text{ ist konvex} \iff f'' \geq 0 \text{ in } (a, b).$$

**2.14 Beispiel.** Die Funktion  $-\log$  ist konvex auf  $\mathbb{R}_+$ , denn es gilt  $(\log x)'' = -\frac{1}{x^2} \leq 0$  für alle  $x > 0$ . Funktionen  $f$  mit der Eigenschaft, dass  $-f$  konvex ist, nennt man *konkav*. Speziell ist also  $\log$  eine konkave Funktion auf  $\mathbb{R}_+$ .

Konvexe und konkave Funktionen sind wichtige Begriffe in der Analysis und haben interessante Anwendungen. Wir betrachten hier speziell die Youngsche und die Hölder-sche Ungleichung. Für  $p \in (1, \infty)$  nennen wir  $q \in (1, \infty)$ , mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

den zu  $p$  konjugierten Index.

**2.15 Satz.** (Youngsche Ungleichung). Für  $1 < p, q < \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad a, b \geq 0.$$

*Beweis.* Es seien  $a > 0$  und  $b > 0$ , ansonsten ist die Behauptung trivial. Da  $\log$  eine konkave Funktion ist, folgt aus der Definition der Konvexität mit  $\lambda = 1/p$  und  $(1 - \lambda) = 1/q$ , dass

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \log a + \log b = \log(ab)$$

gilt. Da die Exponentialfunktion monoton steigend ist, ergibt sich die Behauptung durch Anwenden der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der obigen Ungleichung.  $\square$

Für einen Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  und  $p$  mit  $1 < p < \infty$  definieren wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

**2.16 Korollar.** (Höldersche Ungleichung). Für  $1 < p, q < \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$  und  $x, y \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Wir beobachten, dass der Spezialfall  $p = q = 2$  genau die aus der Linearen Algebra bekannte Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung ist.

*Beweis.* OBdA seien  $x, y \neq 0$ . Die obige Youngsche Ungleichung impliziert

$$\frac{|x_j|}{\|x\|_p} \frac{|y_j|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Aufsummieren liefert

$$\sum_{j=1}^n \frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

also die Behauptung.  $\square$

### 3 Der Satz von Taylor

In der bis hierher entwickelten Differentialrechnung approximierten wir eine im Punkt  $a$  differenzierbare Funktion  $f$  durch affine Funktionen, d.h. es galt die Darstellung

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R(x)$$

mit der linearen Funktion  $f'$  und einem gewissen Fehler  $R$ , für welchen  $\lim_{x \rightarrow a} R(x)(x - a) = 0$  galt. Unser jetziges Ziel besteht darin, eine gegebene Funktion  $f$  durch Polynome genauer als bisher zu approximieren. Genauer gesagt suchen wir für eine gegebene  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $f$  ein Polynom  $p$  vom Grade kleiner oder gleich  $n$  mit

$$(3.1) \quad p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad \dots, \quad p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  eines solchen Polynoms  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - a)^j$  errechnen sich wegen  $p^{(k)}(a) = k!a_k$  zu

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Es existiert also genau ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich  $n$ , welches (3.1) erfüllt, nämlich

$$(T_n f)(x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

**3.1 Definition.** Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion und  $a \in I$ . Dann heißt  $T_n f$   $n$ -tes Taylorpolynom von  $f$  im Entwicklungspunkt  $a$ .

Die Frage wie gut sich  $f$  durch  $T_n f$  approximieren lässt, hängt natürlich vom Restglied

$$(R_n f)(x, a) := f(x) - (T_n f)(x, a)$$

ab. Eine befriedigende Antwort hierauf liefert der folgende Satz von Taylor.

**3.2 Theorem.** (Satz von Taylor). *Es seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a, x \in I$  mit  $a \neq x$ ,  $k > 0$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert ein  $\xi \in (\min\{a, x\}, \max\{a, x\})$  so, dass*

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x - a)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{x - \xi}{x - a}\right)^{n-k+1} (x - a)^{n+1}$$

*gilt.*

*Beweis.* Wir zeigen im Folgenden, dass das Restglied der Approximation durch

$$(R_n f)(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{kn!} \left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^{n-k+1} (x-a)^{n+1}$$

gegeben ist. Hierzu definieren wir Funktionen  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h : J \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(t) := \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j, \quad h(t) := (x-t)^k,$$

wobei  $J$  das Intervall  $J := (\min\{a, x\}, \max\{a, x\})$  bezeichnet. Es gilt dann  $g'(t) = f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}$  und  $h'(t) = -k(x-t)^{k-1}$  für alle  $t \in J$  und nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein  $\xi \in J$  mit

$$\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Ferner gilt  $g(x) - g(a) = R_n f(x, a)$  sowie  $h(x) - h(a) = -(x-a)^k$  und deshalb ist

$$R_n f(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{kn!} \left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^{n-k+1} (x-a)^{n+1}.$$

□

Setzt man im obigen Satz speziell  $k = n + 1$  oder  $k = 1$ , so erhalten wir die Restglieddarstellungen von Lagrange und Cauchy.

**3.3 Korollar.** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$R_n f(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (\text{Lagrangesche Darstellung des Restglieds})$$

und

$$R_n f(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left(\frac{x-\xi}{x-a}\right)^n (x-a)^{n+1} \quad (\text{Cauchysche Darstellung des Restglieds}).$$

Wir betrachten im Folgenden eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $f$  auf einem Intervall  $J \subset \mathbb{R}$ . Für  $a \in J$  heißt

$$(Tf)(x, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n f)(x, a)$$

die *Taylorreihe* von  $f$  in  $a$ . Es stellen sich dann natürlicherweise die folgende Fragen:

- a) Konvergiert die obige Reihe und wenn ja, gegen welchen Wert?

b) Wird  $f$  in einer Umgebung von  $a$  durch seine Taylorreihe dargestellt?

Eine erste Antwort auf die Frage b) gibt der folgende Satz.

**3.4 Satz.** *Es sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion und  $x, a \in J$ . Dann gilt:*

$$(Tf)(x, a) = f(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x, a) = 0.$$

Dieser Satz folgt natürlich sofort aus dem Taylorsche Satz 3.2 und der Definition der Konvergenz einer Reihe. Auf den ersten Blick erscheint die Aussage dieses Satzes als relativ banal; es existieren jedoch Funktionen  $f$ , für welche  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n f(x, a)$  existiert, aber der Grenzwert verschieden von 0 ist. In diesem Fall konvergiert die Taylorreihe an der Stelle  $x$ , aber *nicht* gegen den Funktionswert  $f(x)$ ! Im folgenden Beispiel geben wir explizit eine solche Funktion an.

**3.5 Beispiel.** Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  (vgl. die Übungen). Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ aber } f(x) \neq 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Taylorreihe gegen  $f$  wird im folgenden Korollar gegeben.

**3.6 Korollar.** *Es sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion und  $x, a \in J$ . Es existiere  $M > 0$  mit*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \max_{\xi \in [a, x]} |f^{(n)}(\xi)| \leq M \text{ bzw. } \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \max_{\xi \in [x, a]} |f^{(n)}(\xi)| \leq M.$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Der Beweis ist einfach. Da

$$|(R_n f)(x, a)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt, folgt die Behauptung aus Satz 3.4.

Wir erläutern den Satz von Taylor weiter anhand von Beispielen.

**3.7 Beispiele.** a) Es gilt

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

denn die Exponentialfunktion  $\exp$  ist auf  $\mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar und es gilt  $f^{(n)}(x) = e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also ist

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 1, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad (T_n f)(x, 0) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

und ferner gilt

$$\max_{\xi \in [0, x]} |f^{(n)}(\xi)| = e^x, \quad \max_{\xi \in [x, 0]} |f^{(n)}(\xi)| = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Korollar 3.6 impliziert daher die Behauptung.

b) Für  $x \in (-1, 1]$  gilt:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Zum Beweis betrachte  $f(x) := \log(1+x)$  für alle  $x > -1$ . Dann ist  $f$  beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}, \quad \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 0, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und somit

$$T_n f(x, 0) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j.$$

Die Lagrangsche Restglieddarstellung für  $x \in [0, 1]$  lautet

$$R_n f(x, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)}$$

für ein  $\xi \in (0, 1)$ . Somit ist  $|R_n f(x, 0)| \leq \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+\xi} \right|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ , und daher

$$R_n f(x, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad x \in [0, 1].$$

Falls  $-1 < x < 0$ , so gilt nach der Cauchyschen Restglieddarstellung

$$R_n f(x, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left( \frac{x-\xi}{x} \right)^n x^{n+1} = \frac{n!(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}n!} x^{n+1} \left( \frac{x-\xi}{x} \right)^n$$

und somit

$$|R_n f(x, 0)| = \frac{|x - \xi|^n}{|1 + \xi| |1 + \xi|^n} |x|.$$

Für  $\xi \in (x, 0)$  gilt  $\xi - x = \xi + 1 - (x + 1)$  und somit  $|\frac{x-\xi}{1+\xi}| = \frac{\xi-x}{1+\xi} = 1 - \frac{1+x}{1+\xi} < 1$ . Also ist

$$|R_n f(x, 0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gilt für  $x = 1$

$$\ln(x + 1) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

womit wir den Wert der alternierenden harmonischen Reihe explizit bestimmt haben.

Der Satz von Taylor liefert auch ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Bestimmung lokaler Extremwerte.

**3.8 Satz.** (Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema). *Es seien  $n \in \mathbb{N}$  ungerade,  $J \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion,  $a \in J$  und es gelte*

$$f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0, \quad \text{sowie } f^{(n+1)}(a) \neq 0.$$

*Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- a) Ist  $f^{(n+1)}(a) > 0$ , so hat  $f$  in  $a$  ein lokales Minimum.*
- b) Ist  $f^{(n+1)}(a) < 0$ , so hat  $f$  in  $a$  ein lokales Maximum.*

*Beweis.* Es sei  $f^{(n+1)}(a) > 0$ . Da nach Voraussetzung  $f^{(n+1)}$  auf  $J$  stetig ist, existiert eine Umgebung  $U_\delta(a) \subset J$  von  $a$  mit  $f^{(n+1)}(x) > 0$  für alle  $x \in U_\delta(a)$ . Der Satz von Taylor mit der Restglieddarstellung von Lagrange impliziert, dass ein  $\xi \in U_\delta(a)$  existiert mit

$$f(x) = f(a) + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}^{>0} (x - a)^{n+1} > f(a), \quad \text{für alle } x \in U_a,$$

also die Behauptung. Für den Fall  $f^{(n+1)}(a) < 0$  verläuft der Beweis analog. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir Nullstellen differenzierbarer Funktionen näherungsweise berechnen.

Hierzu betrachten wir zunächst eine affine Approximation von  $f$  gegeben durch  $F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Ist  $f'(x_0) \neq 0$ , so setzen wir

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Gilt  $x_1 \in D_f$ , so verfahren wir analog weiter und setzen  $x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ . Allgemeiner definieren wir die  $(n + 1)$ -te Iterierte als

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dieses Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion heißt *Newton-Verfahren*.

**3.9 Satz.** (Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren). *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und es gelte*

- a)  $f$  besitzt in  $[a, b]$  eine Nullstelle  $\xi$ ,
- b)  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ ,
- c)  $f$  ist konvex oder konkav auf  $[a, b]$ ,
- d) Es gelte  $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \in [a, b]$  für  $x_0 = a$  und  $x_0 = b$ .

Dann konvergiert das Newton-Verfahren für jedes  $x_0 \in [a, b]$  monoton gegen  $\xi$  und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_k - x_{k-1}|^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei  $m := \min\{|f'(\tau)| : \tau \in [a, b]\}$  und  $M := \max\{|f''(\tau)| : \tau \in [a, b]\}$  gilt.

Die obige Fehlerabschätzung bedeutet, dass das Newton-Verfahren eine *quadratische Konvergenzordnung* besitzt.

*Beweis.* Wir unterscheiden die vier Fälle  $f' > 0, f'' \geq 0$ , bzw.  $f' < 0, f'' \geq 0$ , bzw.  $f' > 0, f'' \leq 0$ , bzw.  $f' < 0, f'' \leq 0$  und beweisen hier im Detail aber nur den ersten. Der Beweis der anderen Fälle verläuft analog.

Definiert man eine Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$



so erhalten wir, da  $f$  nach Voraussetzung monoton steigend ist und  $f(\xi) = 0$  sowie  $f'' \geq 0$  gilt,

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \begin{cases} \leq 0, & x \in [a, \xi] \\ \geq 0, & x \in [\xi, b]. \end{cases}$$

Ferner ist  $\varphi(\xi) = \xi$  ein Minimum von  $\varphi$  in  $[a, b]$ . Nach Voraussetzung d) ist deshalb  $\varphi(x) \in [\xi, b]$  für alle  $x \in [a, b]$  und es gilt  $\varphi(x) \leq x$  für alle  $x \in [\xi, b]$ . Wir setzen nun

$$x_{k+1} := \varphi(x_k).$$

Dann gilt  $x_1 \in [\xi, b]$  und  $x_k \in [\xi, b]$  impliziert  $\xi \leq x_{k+1} \leq x_k$ . Deshalb ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge welche einen Grenzwert besitzt. Da  $\varphi$  stetig vorausgesetzt war, folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ .

Zum Beweis der Fehlerabschätzung benutzen wir den Mittelwertsatz und erhalten

$$\left| \frac{f(x_k) - f(\xi)}{x_k - \xi} \right| \geq m,$$

was wiederum  $|x_k - \xi| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}$  bedeutet. Wir schätzen  $|f(x_k)|$  mit Hilfe des Satzes von Taylor im Entwicklungspunkt  $x_{k-1}$  anhand des Lagrangeschen Restglieds ab und erhalten

$$f(x_k) = \underbrace{f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}_{=0 \text{ nach Konstruktion}} + \frac{1}{2} f''(\tilde{x})(x_k - x_{k-1})^2$$

für ein  $\tilde{x} \in (x_{k-1}, x_k)$ . Also gilt  $|f(x_k)| \leq \frac{M}{2}(x_k - x_{k-1})^2$  und daher

$$|x_k - \xi| \leq \frac{M}{2m} |x_k - x_{k-1}|^2.$$

□

## 4 Konvergenz von Funktionenfolgen

In der Analysis sind Approximationsverfahren für Funktionen  $f$  durch Funktionenfolgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit gewissen, oft „besseren“ Eigenschaften als  $f$  sie besitzt, von zentraler Bedeutung. So wird zum Beispiel unsere Konstruktion des Integrals im folgenden Kapitel wesentlich von einem solchem Approximationsverfahren oder einem solchem Grenzprozess bestimmt.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Betrachtung einer Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  mit einem gemeinsamen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}$ . Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt auf  $D$  *punktweise konvergent*, falls für alle  $x \in D$  die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  konvergiert. Die Vorschrift

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

definiert dann eine *Grenzfunktion*  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ . Es stellen sich nun natürlicherweise die folgenden Fragen:

- Übertragen sich zentrale Eigenschaften der Funktionen  $f_n$ , wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, auf die Grenzfunktion  $f$ ?
- Lässt sich gegebenenfalls die Ableitung  $f'$  der Grenzfunktion durch die Ableitungen der Funktionen  $f_n$  berechnen?

Sind die Funktionen  $f_n$  in  $x_0 \in D$  stetig, so ist die Grenzfunktion  $f$  in  $x_0 \in D$  genau dann stetig, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt, also genau dann wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

gilt. Die Frage nach der Stetigkeit der Grenzfunktion führt uns also auf die Problematik der Vertauschbarkeit von Grenzprozessen. Wir zeigen im Folgenden, dass solche Grenzprozesse im Allgemeinen nicht vertauscht werden dürfen.

### 4.1 Beispiele.

- Es sei  $D = [0, 1]$  und  $f_n(x) = x^n$  für alle  $x \in [0, 1]$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann sind die Funktionen  $f_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  auf  $D$  stetig, die Grenzfunktion  $f$ , gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

hingegen ist unstetig im Punkt  $x = 1$ .

- Es sei wiederum  $D = [0, 1]$  und  $g_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Grenzfunktion ist  $g \equiv 0$  mit der Ableitung  $g' \equiv 0$ . Andererseits gilt  $g'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und die Folge  $g'_n(x)$  divergiert an jeder Stelle  $x \in D$ .

**4.2 Definition.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine Menge und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion. Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *gleichmäßig konvergent auf  $D$  gegen  $f : M \rightarrow \mathbb{K}$* , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in M, n \geq N_0.$$

**4.3 Bemerkungen.** a) Eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergente Funktionenfolge  $(f_n)$  konvergiert natürlich auch punktweise gegen  $f$ . Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

b) Setzt man

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|,$$

so konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$ , genau dann wenn

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt.

c) Für die Funktionenfolgen aus den obigen Beispielen a) und b) gilt  $\|f_n - f\|_\infty = 1$  bzw.  $\|g_n - g\|_\infty = 1/\sqrt{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus Beispiel a) konvergiert nicht gleichmäßig auf  $[0, 1]$ , denn ansonsten würde zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  ein  $N_0$  existieren mit  $x^n < \frac{1}{2}$  für alle  $x \in [0, 1)$  und alle  $n \geq N_0$ . Es ist aber  $\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1 > \frac{1}{2}$ . Widerspruch! Hingegen konvergiert  $(g_n)$  aus Beispiel b) gleichmäßig auf  $[0, 1]$  gegen  $g \equiv 0$ , aber  $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht.

d) Der Unterschied zwischen punktwieser und gleichmäßiger Konvergenz kann wie folgt beschrieben werden: betrachtet man bei *punktweiser Konvergenz* ein  $x \in D$ , so existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N = N(\varepsilon, x)$  so, dass  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt. Die Zahl  $N(\varepsilon, x)$  darf hier von  $x$  abhängen. Bei *gleichmäßiger Konvergenz* gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine universelle Zahl  $N = N(\varepsilon)$  so, dass für alle  $n > N(\varepsilon)$  und *alle*  $x \in D$  gilt:  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ .

e) Für  $x > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  betrachte  $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ . Dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen 0, für  $a > 0$  konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar gleichmäßig auf  $[a, \infty)$  gegen 0, aber  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0 auf  $[0, \infty)$ .

Der folgende Satz gibt - analog zur Untersuchung bei Reihen - ein inneres Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge an, ohne die Grenzfunktion explizit kennen zu müssen.

**4.4 Satz.** (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz). *Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit*

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

*Beweis.*  $\implies$ : Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f$ . Es existiert also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_0$  mit  $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n > N_0$ . Somit gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n - f\| + \|f - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N_0.$$

$\impliedby$ : Die Voraussetzung impliziert, dass  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $x \in D$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$  ist. Da  $\mathbb{K}$  vollständig ist, existiert ein eindeutiger Grenzwert welchen wir mit  $f(x)$  bezeichnen. Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert nach Voraussetzung ein  $N(\varepsilon)$  mit  $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \in D$  und alle  $n, m \geq N(\varepsilon)$ . Daher ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon), x \in D,$$

und somit existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N(\varepsilon)$  mit  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  und alle  $x \in D$ . □

Im Folgenden beschäftigen wir uns nun im Detail mit der Eingangs gestellten Frage unter welchen Bedingungen gewisse Eigenschaften der Funktionen  $f_n$ , wie etwa Stetigkeit, Beschränktheit oder Differenzierbarkeit sich auf die Grenzfunktion  $f$  übertragen lassen. Wir beginnen mit der Eigenschaft der Beschränktheit.

**4.5 Lemma.** *Es seien  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  beschränkte Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $D$  gegen eine Funktion  $f$ , so ist auch  $f$  beschränkt auf  $D$ .*

*Beweis.* Zu  $\varepsilon = 1$  existiert  $N_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|f(x) - f_{N_1}(x)| < 1$  für alle  $x \in D$ . Nach Voraussetzung existiert weiter eine Konstante  $M_{N_1}$  mit  $|f_{N_1}(x)| \leq M_{N_1}$  für alle  $x \in D$ . Also gilt

$$|f(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{N_1}(x)|}_{< 1} + \underbrace{|f_{N_1}(x)|}_{\leq M_{N_1}} \leq 1 + M_{N_1} \quad \text{für alle } x \in D.$$

□

Das folgende Resultat besagt, dass die Eigenschaft der Stetigkeit einer approximierenden Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sich auf die Grenzfunktion  $f$  überträgt, sofern die Konvergenz gleichmäßig ist.

**4.6 Theorem.** (Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig).

Es seien  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetige Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , so ist  $f$  stetig. Mit anderen Worten bedeutet dies, dass der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen stetig ist.

*Beweis.* Es sei  $x_0 \in D$  und  $\varepsilon > 0$ . Da  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|f_{N_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $x \in D$ . Ferner, da  $f_{N_0}$  nach Voraussetzung stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in U_\delta(x_0) \cap D.$$

Deshalb gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{N_0}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_0}(x) - f_{N_0}(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{N_0}(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon$$

für alle  $x \in U_\delta(x_0) \cap D$ . □

Das obige Beispiel 4.1 b) zeigt, dass ein zu Theorem 4.6 analoger Satz für differenzierbare Funktionen im Allgemeinen nicht gültig sein kann. Wir müssen in dieser Situation vielmehr die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Ableitungen gegen eine Grenzfunktion fordern. Genauer gilt das folgende Resultat.

**4.7 Theorem.** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  seien stetig differenzierbare Funktionen für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- a) Die Folge  $(f_n(c))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  konvergiert für ein  $c \in [a, b]$ .
- b) Es existiert eine Funktion  $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  derart, dass die Folge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f^*$  konvergiert.

Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig, die Grenzfunktion  $f$  ist differenzierbar und die Folge  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f' = f^*$ .

*Beweis.* Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte:

*Schritt 1:* Wir zeigen zunächst, dass die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergiert. In der Tat gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - [f_n(c) - f_m(c)]| + |f_n(c) - f_m(c)|$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in [a, b]$ . Der Mittelwertsatz angewandt auf den ersten Term der rechten Seite liefert

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)||x - c| + |f_n(c) - f_m(c)| \quad \text{für ein } \xi \in (a, b).$$

Für  $\varepsilon > 0$  existiert nach Voraussetzung a) und b) ein  $N_0$  mit

$$\|f'_n - f'_m\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \text{für alle } n, m \geq N_0$$

und  $|f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n, m \geq N_0$ . Deshalb ist

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Die erste Behauptung folgt nun aus dem Cauchy Kriterium 4.4.

*Schritt 2:* Wir setzen

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Dann konvergiert  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f$  nach Schritt 1. Nach Theorem 4.6 ist deshalb die Grenzfunktion  $f$  stetig auf  $[a, b]$  und auch  $f^* := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  ist stetig auf  $[a, b]$ .

*Schritt 3:* Wir zeigen, dass die Grenzfunktion  $f$  differenzierbar ist und dass  $f' = f^*$  gilt.

Hierzu betrachten wir für  $x_0 \in [a, b]$  die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  gegeben durch

$$g(t) = f_n(x_0 + t(x - x_0)) - t f'_n(x_0)(x - x_0).$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt  $g(1) - g(0) = g'(\xi)$  für ein  $\xi \in (0, 1)$ . Also ist

$$g(1) - g(0) = f_n(x) - f_n(x_0) - f'_n(x_0)(x - x_0) = g'(\xi) = [f'_n(x_0 + \xi(x - x_0)) - f'_n(x_0)](x - x_0)$$

und somit gilt

$$f(x) - f(x_0) - f^*(x_0)(x - x_0) = [f^*(x_0 + \xi(x - x_0)) - f^*(x_0)](x - x_0) =: \varphi(x)(x - x_0)$$

Nun ist  $f^*$  nach Schritt 2 stetig und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f^*(x_0) - f^*(x_0) = 0.$$

Daher ist  $f$  nach Satz 1.3 in  $x_0$  differenzierbar und es gilt  $f'(x_0) = f^*(x_0)$ . □

#### 4.8 Bemerkungen.

a) Es sei  $D = \mathbb{R}$  und  $f_n$  sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{nx}{2}, & -\frac{\pi}{n} \leq x \leq \frac{\pi}{n} \\ 1, & \frac{\pi}{n} < x. \end{cases}$$

Dann sind die Funktionen  $f_n$  stetig für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber die Grenzfunktion  $f$  definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ist unstetig in  $x = 0$ . Also konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *nicht* gleichmäßig gegen  $f$ .

b) Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachte die Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$ . Dann konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f \equiv 0$ , denn es gilt  $\sin(n^2 x) \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}$ . Also ist auch  $f' \equiv 0$ . Andererseits ist die Folge  $(f'_n)(x) = (n \cos(n^2 x))_{n \in \mathbb{N}}$  divergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dies bedeutet, dass die Voraussetzung b) in Theorem 4.7 unabdingbar ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch Kriterien für die Konvergenz von Reihen von Funktionen.

**4.9 Satz.** (Weierstraßsches Konvergenzkriterium). *Es sei  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Funktionen mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty$ . Dann konvergiert die Funktionenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gleichmäßig, d.h. die Folge der Partialsummen konvergiert gleichmäßig.*

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

Das obige Weierstraßsche Kriterium hat wichtige Anwendungen auf die Konvergenz von Potenzreihen. Insbesondere gilt die folgende Folgerung.

**4.10 Korollar.** *Eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  konvergiert für jedes  $r \in (0, \rho)$  absolut und gleichmäßig auf  $\overline{U_r(0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ .*

In der Tat wissen wir aus den uns schon bekannten Ergebnissen über Potenzreihen, dass  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$  konvergiert. Betrachtet man die Funktionen  $f_n : \overline{U_r(0)} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f_n(x) := a_n x^n$ , so gilt  $\|f_n\|_{\infty} \leq |a_n| r^n$  und das Weierstraßsche Kriterium 4.9 liefert die Behauptung.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises stetige Funktionen definieren.

**4.11 Korollar.** *Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$  definiert auf  $U_{\rho}(0)$  eine stetige Funktion.*

**4.12 Beispiele.** a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , denn es gilt  $|\frac{\cos(n \cdot x)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Die *Riemannsche Zeta-Funktion*  $\zeta$  gegeben durch

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \alpha\}$  für jedes  $\alpha > 1$ , denn es ist  $|\frac{1}{n^z}| = |\frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ .

Schließlich untersuchen wir die Frage, ob die durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion differenzierbar ist. Hierzu zunächst ein Lemma.

**4.13 Lemma.** *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann besitzt die formale Ableitung:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

den Konvergenzradius  $\rho$ .

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

**4.14 Satz.** *Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist  $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{K}$  differenzierbar und es gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)', \quad x \in (-\rho, \rho),$$

d.h. Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden.

Der Beweis folgt direkt aus Korollar 4.10 und Theorem 4.7.

Für  $|x| < 1$  betrachten wir das folgende Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Iteriert man die Aussage des obigen Satzes, so erhält man die folgende Verschärfung von Satz 4.14.

**4.15 Korollar.** *Es sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho > 0$ . Dann ist  $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{K}$  beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$a_n = \frac{n!}{f^{(k)}(0)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$



Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem Abelschen Grenzwertsatz, welchen wir ohne Beweis nur zitieren.

**4.16 Satz.** (Abelscher Grenzwertsatz). *Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine konvergente Reihe. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

*gleichmäßig für  $x \in [0, 1]$  und stellt somit eine stetige Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  dar.*

**4.17 Beispiel.** Wir betrachten die Reihenentwicklung der arctan-Funktion gegeben durch

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$  konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Also gilt mit dem Abelschen Grenzwertsatz

$$\frac{\pi}{4} \stackrel{III.4}{=} \arctan(1) \stackrel{\text{Abel}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

# V Integralrechnung einer Variablen

Die Bestimmung von Flächen, Volumen und Kurvenlängen gehört zu den historisch gesehen, ältesten mathematischen Problemen und viele dieser Fragestellungen sind aus heutiger Sicht klassische Themen der Integrationstheorie.

So war es für ARCHIMEDES (287-212 v. Chr.) evident, dass eine krummlinig begrenzte Figur einen Flächeninhalt besitzt. Um diesen zu bestimmen, wurde dieser „von innen“ und „von außen“ durch einfachere Objekte mit bekanntem Flächeninhalt approximiert. Die systematische Untersuchung des Integralbegriffs begann erst deutlich später mit der Entdeckung des Zusammenhangs von Differentiation und Integration durch G.W. LEIBNIZ (1646-1716) und I. NEWTON (1642-1727) im 17. Jahrhundert. A.-L. CAUCHY (1789-1857) erkannte als erster in seinem berühmten Lehrbuch *Calcul infinitésimal* im Jahre 1823 die Notwendigkeit einer Definition des Integrals und einer sich darauf aufbauenden Integrationstheorie. B. RIEMANN (1826-1866) erweiterte diesen Begriff dann auf allgemeinere Funktionen. Ein andersartiger, jedoch sehr umfassender Integralbegriff wurde schließlich von H.-L. LEBESGUE im Jahre 1902 eingeführt; wir werden diesen später in der Vorlesung Analysis IV intensiv untersuchen.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel zunächst auf das Integral für sogenannte sprungstetige Funktionen, eine weniger allgemeine Klasse von Funktionen als diejenige der Riemann-integrierbaren Funktionen. Der Vorteil dieses Zugangs liegt darin, dass wir den Integralbegriff zunächst für sogenannte Treppenfunktionen direkt erklären können und diesen dann später – via eines Approximationsprozesses – auf allgemeinere Funktionen ausdehnen können.

Wir beginnen dieses Kapitel in Abschnitt 1 mit der Einführung von Treppen- und sprungstetigen Funktionen. Der Approximationssatz für sprungstetige Funktionen durch Treppenfunktionen bildet den Hauptsatz dieses Abschnitts und die Grundlage unseres Integralbegriffs. Kapitel 2 widmet sich dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und dem Vergleich unseres Integralbegriffs mit dem sogenannten Riemann-Integral. Danach betrachten wir in Abschnitt 3 klassische Integrationstechniken wie partielle Integration und Substitution, bevor wir im letzten Abschnitt das uneigentliche Integral untersuchen.

# 1 Treppen- und Sprungstetige Funktionen

In diesem Abschnitt seien immer  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $I$  bezeichne das abgeschlossene Intervall  $I := [a, b]$ . Wir beginnen mit der Definition des Begriffs einer Zerlegung des Intervalls  $I$ .

**1.1 Definition.** a) Man nennt  $Z := (x_0, \dots, x_n)$  eine *Zerlegung von  $I$* , falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

gilt.

b) Eine Zerlegung  $\bar{Z} := (y_0, \dots, y_n)$  heißt *Verfeinerung von  $Z$* , falls  $\{x_0, \dots, x_n\} \subset \{y_0, \dots, y_n\}$  gilt. In diesem Fall schreibt man  $Z \subset \bar{Z}$ .

c) Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *Treppenfunktion*, falls eine Zerlegung  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  von  $I$  existiert, so dass  $f$  auf jedem Intervall  $(x_{j-1}, x_j)$  konstant ist für alle  $j = 1, \dots, n$ .

d) Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *sprungstetig* auf  $I$ , falls  $f$

- i) für alle  $x \in (a, b)$  einen links und rechtsseitigen Grenzwert besitzt und
- ii) in  $a$  und  $b$  einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert besitzt.

**1.2 Bemerkungen.** a) Die Menge der Treppenfunktionen

$$\mathcal{T}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}; \varphi \text{ ist Treppenfunktion auf } [a, b]\}$$

sowie die Menge der sprungstetigen Funktionen

$$\mathcal{S}[a, b] := \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}; \varphi \text{ ist sprungstetig auf } [a, b]\}$$

sind Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und  $\mathcal{T}[a, b]$  ist ein Untervektorraum von  $\mathcal{S}[a, b]$ .

b) Jede stetige Funktion auf  $[a, b]$  ist sprungstetig.

c) Jede monotone Funktion auf  $[a, b]$  ist sprungstetig.

d) Setzen wir

$$\begin{aligned} C[a, b] &:= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ ist stetig auf } [a, b]\}, \\ C^1[a, b] &:= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [a, b]\}, \text{ sowie} \\ B[a, b] &:= \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ ist beschränkt auf } [a, b]\}, \end{aligned}$$

so sind  $C[a, b]$ ,  $C^1[a, b]$  und  $B[a, b]$  ebenfalls Vektorräume über  $\mathbb{K}$  und es gilt

$$C^1[a, b] \subset C[a, b] \subset \mathcal{S}[a, b] \subset B[a, b]$$

im Sinne von Untervektorräumen.

Wir definieren nun das Integral für Treppenfunktionen.

**1.3 Definition.** Es seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Treppenfunktion und  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  eine Zerlegung von  $I$ . Es gelte  $f(x) = c_j$  für alle  $x \in (x_{j-1}, x_j)$  und alle  $j = 1, \dots, n$ . Dann heißt

$$\int_Z f := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1})$$

das *Integral von  $f$  (bezüglich  $Z$ )*.

Wir müssen nun zunächst zeigen, dass das Integral  $\int_Z f$  einer Funktion  $f$  nur von  $f$ , aber nicht von der gewählten Zerlegung  $Z$  abhängt.

**1.4 Lemma.** *Es seien  $f \in \mathcal{T}[a, b]$  sowie  $Z$  und  $Z'$  Zerlegungen von  $[a, b]$ . Dann gilt*

$$\int_Z f = \int_{Z'} f.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Zerlegungen  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  und  $Z' = (x_0, \dots, x_k, y, x_{k+1}, \dots, x_n)$  des Intervalls  $I$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Z f &= \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k c_j (x_j - x_{j-1}) + \underbrace{c_{k+1} (x_{k+1} - x_k)}_{=c_{k+1}(x_{k-1}-y)+c_{k+1}(y-x_k)} + \sum_{j=k+2}^n c_j (x_j - x_{j-1}) = \int_{Z'} f. \end{aligned}$$

Ist  $Z'$  eine beliebige Verfeinerung von  $Z$ , so folgt die Behauptung durch wiederholtes Anwenden des obigen Arguments. Sind  $Z$  und  $Z'$  beliebige Zerlegungen des Intervalls  $I$ , so ist  $Z \cup Z'$  eine Verfeinerung von jeweils  $Z$  und  $Z'$ . Deshalb ist

$$\int_Z f = \int_{Z \cup Z'} f = \int_{Z'} f.$$

□

Das obige Lemma impliziert, dass wir nun das Integral einer Treppenfunktion als

$$\int_I f := \int_a^b f(x) dx := \int_I f dx := \int f := \int_Z f.$$

definieren können. Die folgenden Eigenschaften des Integrals folgen unmittelbar.

**1.5 Lemma.** *Es seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- a)  $\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$  (Linearität des Integrals).
- b)  $|\int_I \varphi| = |\int_a^b \varphi(x) dx| \leq (b - a) \|\varphi\|_\infty$ .
- c) Sind  $\varphi$  und  $\psi$  reellwertig mit  $\varphi \leq \psi$ , so gilt  $\int_I \varphi \leq \int_I \psi$  (Monotonie des Integrals).

Unser Ziel ist es im Folgenden, das Integral, welches wir bisher nur für Treppenfunktionen definiert haben, so auf sprungstetige Funktionen fortzusetzen, dass die obigen Eigenschaften des Integrals erhalten bleiben. Hierzu ist der folgende Approximationssatz für sprungstetige Funktionen durch Treppenfunktionen von entscheidender Bedeutung.

**1.6 Theorem.** (Approximationssatz für sprungstetige Funktionen). *Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  ist genau dann sprungstetig auf  $[a, b]$ , wenn eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$  von Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  existiert derart, dass  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert, d.h. wenn  $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  gilt.*

*Beweis.*  $\implies$ : Sei  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  eine sprungstetige Funktion und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existieren für alle  $x \in I = [a, b]$  reelle Zahlen  $\alpha_x$  und  $\beta_x$  mit  $\alpha_x < x < \beta_x$  und

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}, \quad s, t \in (\alpha_x, x) \cap I \text{ oder } s, t \in (x, \beta_x) \cap I.$$

Nun ist die Menge  $\{(\alpha_x, \beta_x) : x \in I\}$  eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls  $[a, b]$ . Es existiert daher eine endliche Teilüberdeckung von  $I$ , d.h. es existieren  $x_0 < x_1 < \dots < x_m$  mit  $I \subset \bigcup_{j=0}^m (\alpha_{x_j}, \beta_{x_j})$ . Setzt man  $y_0 := a$ ,  $y_{j+1} := x_j$  für  $j = 0, \dots, m$ , sowie  $y_{m+2} := b$ , so ist  $Z_0 = (y_0, \dots, y_{m+2})$  eine Zerlegung von  $I$ . Wir wählen nun eine Verfeinerung  $Z_1 = (z_0, \dots, z_k)$  von  $Z_0$  mit

$$|f(s) - f(t)| < \frac{1}{n}, \quad s, t \in (z_{j-1}, z_j), \quad j = 1, \dots, k$$

und definieren die die Funktion  $f$  approximierenden Funktionen  $\varphi_n$  via

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (z_0, \dots, z_k) \\ f\left(\frac{z_{j-1} + z_j}{2}\right), & x \in (z_{j-1}, z_j), j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Dann ist  $\varphi_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Treppenfunktion auf  $[a, b]$  und nach Konstruktion gilt  $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n}$  für alle  $x \in I$ , d.h. es gilt  $\|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$\Leftarrow$ : Nach Voraussetzung ist  $\varphi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  und es gilt  $\|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt für alle  $x \in I$ . Weiter, da  $\varphi_n$  eine Treppenfunktion ist, existiert für alle  $x \in [a, b]$  ein  $a' \in [a, x)$  mit  $\varphi_n(s) = \varphi_n(t)$  für alle  $s, t \in (a', x)$ . Deshalb gilt

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - \varphi_n(s)| + |\varphi_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \text{für alle } s, t \in (a', x).$$

Sei nun  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset I$  eine Folge in  $I$ , welche von links gegen  $x$  konvergiert. Es existiert also ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $s_j \in (a', x)$  für alle  $j \geq N$  und damit

$$|f(s_j) - f(s_k)| < \varepsilon, \quad \text{für alle } j, k \geq N.$$

Daher ist  $(f(s_j))_{j \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} f(s_j) = r$ . Ist  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine weitere Folge wie oben, so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_k) = r'$ . Da aber  $|f(s_j) - f(t_k)| < \varepsilon$  für alle  $j, k > N$  ist, gilt  $r = r'$ , und somit existiert der linksseitige Grenzwert  $\lim_{y \rightarrow x-0} f(y)$ .

Der Beweis für den rechtsseitigen Grenzwert verläuft analog. □

**1.7 Korollar.** *Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  ist genau dann sprungstetig, wenn  $f$  dargestellt werden kann als*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \quad \text{mit } \varphi_n \in \mathcal{T}[a, b] \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_\infty < \infty \quad \text{gilt.}$$

*Beweis.*  $\implies$ : Nach obigem Theorem 1.6 können wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Funktion  $\psi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  derart wählen, dass  $\|f - \psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$  gilt. Setzen wir ferner  $\varphi_1 := \psi_1$  und  $\varphi_k := \psi_k - \psi_{k-1}$  für  $k \geq 2$ , so gilt

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \right| = |f(x) - \psi_n(x)| \leq \|f - \psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n},$$

und somit ist  $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Ferner gilt

$$\|\varphi_j\|_\infty \leq \underbrace{\|\psi_j - f\|_\infty}_{\leq \frac{1}{2^j}} + \underbrace{\|f - \psi_{j-1}\|_\infty}_{\leq \frac{1}{2^{j-1}}} = \frac{3}{2^j},$$

und somit gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_{\infty} < \infty$ .

$\Leftarrow$ : Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $\psi_n := \sum_{j=1}^n \varphi_j$ . Dann ist  $\psi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und es gilt

$$\|f - \psi_n\|_{\infty} = \left\| f - \sum_{j=1}^n \varphi_j \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \varphi_j \right\|_{\infty} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\varphi_j\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Also folgt die Behauptung aus Theorem 1.6

□

**1.8 Korollar.** *Eine sprungstetige Funktion  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Insbesondere gilt diese Aussage für monotone Funktionen.*

*Beweis.* Nach obigem Korollar 1.7 können wir  $f$  darstellen als  $f = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ . Nach Korollar 4.11 kann  $f$  nur an denjenigen Stellen unstetig sein, an denen  $\varphi_n$  für mindestens ein  $n \in \mathbb{N}$  unstetig ist. Nun ist  $\varphi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Treppenfunktion und besitzt also höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen. Damit besitzt aber  $f$  höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

□

## 2 Das Integral und seine Eigenschaften

In diesem Abschnitt seien wiederum  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  und  $I = [a, b]$ . Wir betrachten die folgende Situation: gegeben sei eine sprungstetige Funktion  $f \in \mathcal{S}[a, b]$ , die durch eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$  von Treppenfunktionen, wie in Theorem 1.6 beschrieben, gleichmäßig approximiert wird, d.h. es gilt  $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Setzt man  $I_n := \int_a^b \varphi_n$ , so gilt

$$|I_n - I_m| \stackrel{1.5b)}{\leq} (b-a) \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \leq (b-a) (\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_m\|_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d.h.  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge und somit konvergent. Es sei ferner  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$  eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit  $\|\psi_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Betrachtet man die Folge  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots =: (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen, so gilt  $\|f - g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Also konvergiert die Folge  $(\int_a^b g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und die Teilfolgen  $(\int_a^b \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\int_a^b \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzen denselben Limes. Diese Überlegungen zeigen, dass folgendes Resultat gilt.

**2.1 Theorem und Definition.** *Es seien  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  und  $\varphi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\|f - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Dann existiert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx =: \int_a^b f(x) dx.$$

*Der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl von  $\varphi_n$  und heißt das Integral von  $f$  auf  $[a, b]$ .*

Im Folgenden verwenden wir auch die Bezeichnungen  $\int f$ ,  $\int_I f$  oder  $\int f dx$  für das Integral einer sprungstetigen Funktion  $f$ . Da stetige und monotone Funktionen sprungstetig sind, ist das folgende Korollar unmittelbar klar.

**2.2 Korollar.** *Das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  existiert für jede stetige und jede monotone Funktion  $f$  auf  $[a, b]$ .*

Auf der anderen Seite bemerken wir, dass nicht jede Funktion auf  $[a, b]$  integrierbar ist. Ein Gegenbeispiel ist die uns schon aus Kapitel III bekannte Variante der Dirichletschen Sprungfunktion. Genauer gesagt, existiert das Integral für die Funktion  $f$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

nicht.



Diese Skizze veranschaulicht die Tatsache, dass  $\int \varphi_n$  eine Approximation der orientierten Fläche „unterhalb“ des Graphen von  $f$  ist.

**2.3 Satz.** *Es seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $f, g \in \mathcal{S}[a, b]$ . Dann gilt*

$$a) \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \quad (\text{Linearität des Integrals}).$$

b)  $|f| \in \mathcal{S}[a, b]$  und

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \|f\|_\infty.$$

c) Gilt  $f \leq g$ , d.h.  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so ist

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g, \quad (\text{Monotonie des Integrals}).$$

*Beweis.* Es seien  $\varphi_n$  und  $\psi_n \in \mathcal{T}[a, b]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  Treppenfunktionen derart, dass  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $g$  konvergieren. Deshalb konvergiert  $(\alpha\varphi_n + \beta\psi_n)$  gleichmäßig gegen  $\alpha f + \beta g$  und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b (\alpha\varphi_n + \beta\psi_n) \right) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g,$$

also die Behauptung a).

b) Da die Folge  $(|\varphi_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $|f|$  konvergiert und da  $|f| \in \mathcal{S}[a, b]$  gilt (vgl. Theorem 1.6), folgt  $\int |f| \stackrel{\text{Thm. 2.1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\varphi_n|$ . Somit ist

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b \varphi_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\varphi_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_\infty (b-a) = \|f\|_\infty (b-a).$$

c) Es seien  $\varphi_n$  und  $\psi_n$  reellwertige Treppenfunktionen auf  $[a, b]$ . Dann sind auch  $\varphi_n^- := \varphi_n - \|f - \varphi_n\|_\infty$  und  $\psi_n^+ := \psi_n + \|g - \psi_n\|_\infty$  Treppenfunktionen auf  $[a, b]$  mit  $\varphi_n^- \leq f \leq g \leq \psi_n^+$  und  $(\varphi_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $(\psi_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $g$ . Daher gilt

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n^- \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n^+ = \int_a^b g.$$

□

Wir betrachten nun eine sprungstetige Funktion  $f \in \mathcal{S}[a, b]$ , reelle Zahlen  $c, d \in [a, b]$  und setzen

$$\int_c^d f := \int_c^d f(x) dx := \begin{cases} \int_{[c,d]} f, & c < d \\ 0, & c = d \\ -\int_{[d,c]} f, & d < c \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\int_c^d f = - \int_d^c f.$$

**2.4 Lemma.** (Additivität des Integrals). *Es seien  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  und  $c \in [a, b]$ . Dann gilt*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

*Beweis.* Es sei  $a \leq c \leq b$ . Dann ist die Aussage offensichtlich richtig für alle Treppenfunktionen  $f \in \mathcal{T}[a, b]$ . Wir betrachten deshalb eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$ , welche gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $\varphi_n|_J \in \mathcal{T}(J)$  und  $(\varphi_n|_J)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f|_J$  für jedes kompakte Teilintervall  $J$  von  $[a, b]$ . Da  $\int_a^b \varphi_n = \int_a^c \varphi_n + \int_c^b \varphi_n$  gilt, folgt  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ . □

**2.5 Lemma.** *Es sei  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  eine sprungstetige Funktion mit  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Ist  $f$  stetig in  $c \in [a, b]$  und gilt  $f(c) > 0$ , so ist  $\int_a^b f > 0$ .*

*Beweis.* Es sei  $a < c < b$ . Da  $f$  nach Voraussetzung in  $c$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit  $[c - \delta, c + \delta] \subset [a, b]$  und

$$f(x) \geq \frac{1}{2}f(c), \quad \text{für alle } x \in [c - \delta, c + \delta].$$

Da  $f \geq 0$  ist, impliziert die Monotonie des Integrals, Satz 2.3 c), dass  $\int_a^{c-\delta} f \geq 0$  sowie  $\int_{c+\delta}^b f \geq 0$  gilt. Deswegen ist

$$\int_a^b f \stackrel{2.4}{=} \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \int_{c+\delta}^b f \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \geq \frac{1}{2}f(c) \int_{c-\delta}^{c+\delta} 1 = \delta f(c) > 0.$$

Der Beweis für die Fälle  $c = a$  und  $c = b$  verläuft analog. □

**2.6 Satz.** (Mittelwertsatz für das Integral). *Es seien  $f$  und  $\varphi \in C([a, b])$  mit  $\varphi \geq 0$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

*Beweis.* Ist  $\varphi \equiv 0$ , so ist nichts zu beweisen. Es gelte also  $\varphi(x) > 0$  für ein  $x \in [a, b]$ . Nach Lemma 2.5 gilt  $\int_a^b \varphi > 0$ . Setzen wir

$$m := \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M := \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

so ist  $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$  und die Monotonie sowie die Linearität des Integrals implizieren  $m \int_a^b \varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq M \int_a^b \varphi$ . Es gilt also

$$m \leq \frac{\int_a^b f\varphi}{\int_a^b \varphi} \leq M,$$

und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\frac{\int_a^b f\varphi}{\int_a^b \varphi} = f(\xi),$$

und somit folgt die Behauptung. □

Betrachtet man insbesondere in obigem Satz den Fall  $\varphi \equiv 1$ , so ist das folgende Korollar offensichtlich.

**2.7 Korollar.** *Es sei  $f \in C[a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Wir betrachten nun für  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  die Abbildung

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, \quad F(x) := \int_a^x f(s) ds.$$

Dann gilt aufgrund der Additivität des Integrals

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(s) ds - \int_a^y f(s) ds = \int_y^x f(s) ds, \quad \text{für alle } x, y \in [a, b].$$

Der Satz 2.3 b) impliziert unmittelbar die Abschätzung

$$|F(x) - F(y)| \leq \|f\|_\infty |x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

**2.8 Theorem.** (Differenzierbarkeit des Integrals nach der oberen Grenze). *Es sei  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  stetig in einem Punkt  $c \in [a, b]$  und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  sei definiert durch*

$$F(x) := \int_a^x f(s) ds.$$

*Dann ist  $F$  in  $c$  differenzierbar und es gilt  $F'(c) = f(c)$ .*

*Beweis.* Es sei  $h > 0$  derart, dass  $c + h < b$ . Dann gilt

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_a^{c+h} f(s) ds - \int_a^c f(s) ds \right) \stackrel{\text{Add.}}{=} \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(s) ds.$$

Da  $\int_c^{c+h} f(s) ds = f(c)h$ , gilt

$$\frac{F(c+h) - F(c) - f(c)h}{h} = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(s) - f(c)) ds,$$

und somit

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c) - f(c)h}{h} \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_c^{c+h} |f(s) - f(c)| ds \leq \sup_{s \in [c, c+h]} |f(s) - f(c)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

da  $f$  stetig in  $c$  ist. Also ist  $F$  in  $c$  differenzierbar und es gilt  $F'(c) = f(c)$ . □

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen in folgendem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zusammen.

**2.9 Theorem.** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine stetige Funktion und für  $c \in [a, b]$  setze*

$$F(x) := \int_c^x f(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

*Dann gilt:*

- a)  $F$  ist differenzierbar für alle  $x \in [a, b]$  und es gilt  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- b) Ist  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine differenzierbare Funktion mit  $\phi'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so gilt

$$\phi(x) = \phi(y) + \int_y^x f(s) ds, \quad x, y \in [a, b].$$

*Beweis.* Die Aussage a) folgt direkt aus Theorem 2.8. Um die Aussage b) zu beweisen, seien  $F$  und  $\phi$  wie vorausgesetzt. Dann gilt  $(F - \phi)' = 0$ , also  $F = \phi + \alpha$  für eine Konstante  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Daher ist

$$\int_y^x f(s) ds = F(x) - F(y) = \phi(x) + \alpha - \phi(y) - \alpha = \phi(x) - \phi(y).$$

□

### 2.10 Definition.

Es sei  $f \in \mathcal{S}[a, b]$ . Eine differenzierbare Funktion  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  heißt *Stammfunktion von  $f$* .

Der obige Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung impliziert das folgende Korollar.

**2.11 Korollar.** *Jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  besitzt eine Stammfunktion  $F$  und es gilt:*

$$\int_y^x f(s) ds = F(x) - F(y) =: F|_y^x, \quad x, y \in [a, b].$$

Das obige Korollar garantiert also die Existenz einer Stammfunktion für stetige Funktionen. Wir bemerken jedoch, dass in den meisten Fällen eine explizite Angabe einer Stammfunktion nicht möglich ist.

**2.12 Beispiele.** a) In der folgenden Tabelle sammeln wir Beispiele von Funktionen  $f$ , für welche man die Stammfunktion  $F$  explizit angeben kann.

$f(x)$	$F(x)$
$x^a$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}, a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
$e^x$	$e^x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

b) Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so gilt

$$\int \frac{f'}{f} = \log|f|.$$

In Analogie zum vorherigen Abschnitt betrachten wir jetzt eine Folge von sprungstetigen Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , welche auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $f$  konvergiert und fragen, ob  $f$  wiederum integrierbar ist. Die Antwort auf diese Frage wird im folgenden Satz gegeben.

**2.13 Satz.** *Es sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}[a, b]$  eine Folge von sprungstetigen Funktionen, welche gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Beweis.* Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $n \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$  gilt und zu  $f_n$  eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit  $\|f_n - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon/2$ . Dann gilt  $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$  und somit ist  $f \in \mathcal{S}[a, b]$ . Ferner gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \|f - f_n\| (b - a) \leq \varepsilon (b - a),$$

und somit die Behauptung. □

**2.14 Bemerkung.** Der obige Satz 2.13 erlaubt es, einen einfachen und eleganten Beweis von Theorem IV.4.7 zu geben. Zunächst ist die Grenzfunktion  $f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  der Ableitungen nach Theorem IV.4.6 stetig auf  $I = [a, b]$ . Für festes  $a \in I$  und beliebiges  $x \in I$  gilt

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt,$$

und somit gilt nach Satz 2.13 für  $n \rightarrow \infty$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f^*(t) dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist dann  $f$  differenzierbar und es gilt  $f'(x) = f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

Wir betrachten im Folgenden die Approximation des Integrals durch sogenannte Riemann-Summen.

**2.15 Definition.** Es seien  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion,  $Z := (x_0, \dots, x_n)$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  und  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  für  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann heißt

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die *Riemann-Summe* von  $f$  bzgl.  $Z$  und Stützstellen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Die *Feinheit* der Zerlegung  $Z$  ist definiert durch  $\max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$ .

Es gilt dann das folgende Theorem.

**2.16 Theorem.** *Es sei  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  eine sprungstetige Funktion. Dann existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so, dass für jede Zerlegung von  $[a, b]$  der Feinheit  $< \delta$  und jede Wahl der Stützstellen  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$  gilt*

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung zunächst für Treppenfunktionen; der Approximationssatz 1.6 impliziert dann die Behauptung. Die Behauptung für Treppenfunktion beweisen wir via Induktion nach der Anzahl  $m$  der Sprungstellen von  $f$ .

a) Es sei also  $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$  eine Treppenfunktion und  $\varepsilon > 0$ . Gilt  $\varphi = c$  für alle  $x \in [a, b]$  und ein  $c \in \mathbb{K}$ , so folgt die Behauptung unmittelbar. Besitzt  $\varphi$  genau eine Sprungstelle, so folgt die Behauptung leicht, indem wir  $\delta := \frac{\varepsilon}{4\|\varphi\|}$  wählen.

Für den Induktionsbeweis nehmen wir an, dass die Behauptung schon für Treppenfunktionen mit  $m$  Sprungstellen bewiesen sei und betrachten eine Treppenfunktion  $\varphi$  mit  $m + 1$  Sprungstellen. Wir zerlegen dann  $\varphi$  in  $\varphi = \varphi' + \varphi''$ , wobei  $\varphi'$  eine Treppenfunktion mit  $m$  und  $\varphi''$  eine Treppenfunktion mit genau einer Sprungstelle ist. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir für  $\varphi'$  ein  $\delta'(\varepsilon/2)$  und zu  $\varphi''$  ein  $\delta''(\varepsilon/2)$  derart, dass die Behauptung für  $\varphi'$  und  $\varphi''$  gilt; für  $\delta = \min(\delta', \delta'')$  gilt sie dann für  $\varphi$ .

b) Für  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  wähle  $\varphi$  mit  $\|f - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$  und  $\delta := \delta(\frac{\varepsilon}{3})$ . Nach Teil a) gilt  $|\sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b \varphi dx| < \frac{\varepsilon}{3}$ ; also folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f dx \right| &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| \\ &\quad + \underbrace{\left| \sum_{j=1}^n \varphi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b \varphi dx \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_a^b \varphi dx - \int_a^b f dx \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \\ &< \sum_{j=1}^n \|f - \varphi\|_\infty (x_j - x_{j-1}) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

□

**2.17 Korollar.** Es sei  $Z_1, Z_2, \dots$ , eine Folge von Zerlegungen des Intervalls  $[a, b]$ , deren Feinheit gegen 0 konvergiert und  $S_n$  die zugehörige Riemannsche Summe für  $f \in \mathcal{S}[a, b]$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f.$$

**2.18 Bemerkungen.** a) Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Riemann-integrierbar*, falls ein  $c \in \mathbb{C}$  mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\left| c - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung  $(x_0, \dots, x_n)$  mit der Feinheit  $< \delta$  und jede Wahl von  $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ .

b) Das obige Theorem 2.16 besagt, dass jede sprungetetige Funktion  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  Riemann-integrierbar ist und dass das Riemann-Integral mit unserem Integral übereinstimmt.

c) Es existieren Riemann-integrierbare Funktionen, welche nicht sprungetetig sind.

Das obige Korollar 2.17 erlaubt es in vielen Fällen Aussagen über Summen auf Integrale zu übertragen. Als Beispiel betrachten wir die Höldersche Ungleichung für Integrale. Hierzu setzen wir für  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  und  $1 < p < \infty$

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Dann gilt die folgende Ungleichung.

**2.19 Korollar.** Für  $f, g \in \mathcal{S}[a, b]$  und  $1 < p, q < \infty$  mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Für  $p = q = 2$  ist dies die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* für Integrale. Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.



### 3 Integrationstechniken

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus dem vorherigen Abschnitt erlaubt es die Produkt- und Kettenregel aus der Differentialrechnung in sehr nützliche Integregationstechniken zu übertragen. Wir beginnen diesen relativ kurzen Abschnitt mit der Substitutionsregel. Im gesamten Abschnitt sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ .

**3.1 Satz.** (Substitutionsregel). *Es seien  $f \in C(I)$  und  $\varphi \in C^1[a, b]$  mit  $\varphi([a, b]) \subset I$ . Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F \in C^1(I)$ . Die Kettenregel impliziert, dass  $F \circ \varphi \in C^1[a, b]$  und dass

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x), \quad x \in [a, b]$$

gilt. Deshalb ist

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = (F \circ \varphi)|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

□

**3.2 Beispiele.** a) Für  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b \cos(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} \cos u du = \frac{1}{\alpha} \sin|_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} = \frac{1}{\alpha} (\sin(\alpha b + \beta) - \sin(\alpha a + \beta)).$$

b) Es gilt

$$\int_0^1 x^{n-1} \sin(x^n)dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \sin u du = -\frac{\cos u}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n} (1 - \cos 1).$$

**3.3 Satz.** (Partielle Integration). *Für Funktionen  $f, g \in C^1[a, b]$  gilt*

$$\int_a^b f g' dx = f g \Big|_a^b - \int_a^b f' g dx.$$

Der Beweis ist einfach. Nach der Produktregel gilt  $(fg)' = f'g + fg'$  und somit ist

$$\int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx.$$

**3.4 Beispiele.** a) Es gilt

$$\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx = b e^b - a e^a - [e^b - e^a].$$

b) Wir bestimmen eine Rekursionsformel für  $I_n = \int \sin^n x dx$  für  $n \geq 2$  wie folgt: Es gilt

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx = -\cos x \sin^{n-1}(x) + \int \cos x (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

und somit

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x,$$

wobei  $I_0 = \int \sin^0 x = \int 1 dx = x$  und  $I_1 = \int \sin x = -\cos x$  gilt.

c) *Wallissches Produkt:* (vgl. Übungsaufgaben). Es gilt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2}{4j^2 - 1}.$$

Zum Beweis betrachte  $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ .

**3.5 Beispiel.** Fläche des Einheitskreises.

Betrachte die Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ . Setzt man  $A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}$  und substituiert  $x = \cos t$ , so folgt via partieller Integration

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = -\sin t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 t) dt = \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 t dt, \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Die Fläche des Einheitskreises beträgt somit  $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ .

**3.6 Satz.** ( $\pi$  ist irrational). *Die Zahl  $\pi^2$  und somit auch  $\pi$  ist irrational.*

## 4 Uneigentliche Integrale

Mit unserem bisherigen Integralbegriff konnten wir sprungstetige Funktionen, welche auf einem kompakten Intervall  $I = [a, b]$  definiert sind, integrieren. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Integralbegriff nun auf beliebige Intervalle der reellen Achse ausdehnen; dies führt uns zum Begriff des uneigentlichen Integrals.

Während des gesamten Abschnitts gelte  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Wir nennen eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  *zulässig*, falls die Einschränkung von  $f$  auf jedes beliebige kompakte Teilintervall von  $(a, b)$  sprungstetig ist. Es ist klar, dass eine stetige Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  zulässig ist, ebenso ist  $f \in \mathcal{S}[a, b]$  zulässig, falls  $a, b \in \mathbb{R}$  sind, und  $|f| : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  ist zulässig, falls  $f$  zulässig ist.

**4.1 Definition.** Eine zulässige Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *uneigentlich integrierbar*, falls eine Konstante  $c \in (a, b)$  existiert, derart dass die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^c f \quad \text{und} \quad \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_c^{\beta} f$$

existieren.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass für eine uneigentlich integrierbare Funktion  $f$  die obigen Grenzwerte für alle  $c \in (a, b)$  existieren.

**4.2 Definition.** Es seien  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  uneigentlich integrierbar und  $c \in (a, b)$ . Dann heißt

$$\int_a^b f \, dx := \int_a^c f(x) \, dx := \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_{\alpha}^c f + \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_c^{\beta} f$$

das *uneigentliche Integral* von  $f$  über  $(a, b)$ .

**4.3 Beispiele.** a) Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ existiert} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Um dies einzusehen, wählen wir  $\alpha \neq 1$ . Dann gilt

$$\int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1),$$

und das obige Integral konvergiert für  $b \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\alpha > 1$  ist.

Falls  $\alpha = 1$  ist, so gilt  $\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b$ , welches bedeutet dass der Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$  nicht existiert.

b) Analog beweist man die folgende Aussage:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ existiert} \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

c) Es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

denn die Stammfunktion von  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  ist gegeben durch  $x \mapsto \arctan x$  und es gilt  $\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan \Big|_0^b = \frac{\pi}{2}$ .

d) Für  $\alpha > 0$  gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha},$$

denn es ist  $\int_0^R e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha}$ .

**4.4 Satz.** (Vergleichssatz Integral-Reihe). *Es sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine zulässige und monoton fallende Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

*Beweis.* Für  $x \in [n-1, n]$  und  $n \geq 2$  gilt nach Voraussetzung  $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ . Deswegen ist  $f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1)$  und somit gilt

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n), \quad N \geq 2.$$

Daher gilt

$$\int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

und somit existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx$ , falls die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergiert.

Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, notieren wir, dass nach Voraussetzung

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$$

gilt. Daher ist  $(\sum_{n=1}^N f(n))_{N \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende und beschränkte Folge, also ist  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  konvergent. □

Betrachten wir speziell die Funktion  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  gegeben durch  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ ist konvergent} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ existiert} \stackrel{4.3}{\iff} \alpha > 1.$$

**4.5 Definition.** Eine zulässige Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *absolut integrierbar*, falls  $\int_a^b |f(x)| dx$  existiert.

**4.6 Lemma.** Eine absolut integrierbare Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$  ist integrierbar.

Für den Beweis verweisen wir auf die Übungen.

**4.7 Satz.** (Majorantenkriterium für Integrale). Es seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zulässige Funktionen, derart dass

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \in (a, b)$$

gilt. Ist  $g$  integrierbar, so ist  $f$  absolut integrierbar.

Für den Beweis verweisen wir wiederum auf die Übungen.

**4.8 Beispiel.** Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

ist konvergent, aber *nicht* absolut konvergent.

Um dies einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  gilt, der Integrand auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig ist und dass es daher genügt die Konvergenz des Integrals  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  zu untersuchen. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \frac{\cos R}{R} - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Das Integral  $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$  existiert, da es die konvergente Majorante  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$  besitzt. Dies bedeutet, dass der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\sin x}{x} dx$$

existiert.

Andererseits konvergiert  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$  *nicht* absolut, denn für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

und somit ist

$$\int_0^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n+1}.$$

Letzterer Ausdruck ist gerade die harmonische Reihe, so dass der obige Grenzwert für  $k \rightarrow \infty$  nicht existiert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch die sogenannte Gamma- und Betafunktion. Beide Funktionen sind durch uneigentliche Integrale definiert und stellen wichtige Funktionen der Analysis dar.

#### 4.9 Beispiel. (Die Gamma-Funktion).

Wir beginnen mit der Definition der *Gammafunktion*. Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z > 0$  definieren wir

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Diese Funktion wurde von Euler eingeführt mit dem Ziel die für  $n \in \mathbb{N}$  definierte Fakultätsfunktion  $n \mapsto n!$  zu interpolieren. Wir bemerken zunächst, dass die Gammafunktion wohldefiniert ist. Für  $t \in (0, 1]$  folgt dies aus der Abschätzung

$$|t^{z-1} e^{-t}| = t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t} \leq t^{\operatorname{Re} z - 1},$$

da damit nach Beispiel 4.3b) und Satz 4.7 das Integral  $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt$  absolut konvergiert. Für  $t \in [1, \infty)$  gilt

$$|t^{\operatorname{Re} z - 1} e^{-t}| \leq C_z e^{-t/2}$$

für eine von  $z$  abhängige Konstante  $C_z$ . Da nach Beispiel 4.3 d) das Integral  $\int_1^{\infty} e^{-t/2} dt$  existiert, ist das Integral  $\int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t}$  absolut konvergent.

Die so definierte Gamma-Funktion  $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt die folgenden Eigenschaften:

a)  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$

b)  $\Gamma(1) = 1$

c)  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Um die Eigenschaft a) einzusehen, integrieren wir partiell. Genauer gesagt gilt

$$\underbrace{\int_a^b t^z e^{-t} dt}_{\rightarrow \Gamma(z+1) \text{ für } b \rightarrow \infty \ a \rightarrow 0} = \underbrace{-t^z e^{-t} \Big|_a^b}_{\rightarrow 0 \text{ für } b \rightarrow \infty \ a \rightarrow 0} + z \underbrace{\int_a^b t^{z-1} e^{-t} dt}_a}_{\rightarrow z \Gamma(z) \text{ für } b \rightarrow \infty \ a \rightarrow 0}, \quad 0 < a < b < \infty.$$

Daher gilt  $\Gamma(z+1) = z$  für  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Die Eigenschaft b) folgt unmittelbar aus Beispiel 4.3 d). Ebenso folgt die Eigenschaft c) durch wiederholtes Anwenden von a) in Verbindung mit b).

In vielen Anwendungen ist eine näherungsweise Berechnung von  $\Gamma(x)$  bzw. von  $n!$  für große Werte von  $x$  bzw.  $n$  von Bedeutung. Von besonderem Interesse ist die *Stirlingsche Formel*, welche besagt, dass für  $x > 0$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x+\mu(x)}, \quad \text{mit } 0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}$$

gilt. Daher wird häufig der Wert  $\sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}$  als Näherungswert für  $\Gamma(x)$  herangezogen. Der relative Fehler der Approximation beträgt  $e^{-12x} - 1$  und ist schon für  $x > 10$  kleiner als ein Prozent.

**4.10 Beispiel.** (Die Beta-Funktion)

Eine weitere wichtige Funktion welche durch ein uneigentliches Integral definiert ist, ist die sogenannte *Beta-Funktion*. Sie ist für  $p, q \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$  definiert durch

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

Das obige Integral ist absolut konvergent. (vgl. Übungsaufgaben) und somit ist  $B(p, q)$  wohldefiniert. Ferner gilt die Beziehung

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(p, q), \quad \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0.$$